Interaction de strates consécutives III: le cas de la valeur propre 1.

Daniel Barlet.

04/01/06

Introduction

Le but du présent article est de compléter l'étude du phénomène d'emmêlement de strates (consécutives) pour les cycles évanescents, faite dans [B.91][1] pour une valeur propre de la monodromie différente de 1 par l'étude du cas de la valeur propre 1 de la monodromie. La situation que nous considérons ici est le cas d'un germe non constant de fonction holomorphe $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ vérifiant la propriété suivante :
Il existe un germe de courbe $(S, 0)$ à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel qu'en chaque point x en dehors de cette courbe la monodromie locale de f agissant sur la cohomologie réduite de la fibre de Milnor de f en x ne présente pas la valeur propre 1.
Bien sur, le germe de courbe $(S, 0)$ est "à priori" contenu dans le lieu singulier de l'hypersuface $f^{-1}(0)$ mais ce lieu singulier sera en général de dimension plus grande que 1.

De même que pour le cas d'une valeur propre $\neq 1$ on rencontre cette situation de la façon suivante :
On considère un germe non constant de fonction holomorphe

$$\tilde{F} : (\mathbb{C}^N, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$$

et on denote par $\Sigma_0 \subset \Sigma_1$ les deux plus grosses strates du lieu singulier de $\tilde{F}^{-1}(0)$ le long desquelles la valeur propre 1 de la monodromie apparait (sur la cohomologie <u>réduite</u>). Ce sont donc les supports des deux premiers faisceaux de cohomologie non nuls du complexe à cohomologie constructible

[1] Voir également [B.03].

des cycles évanescents de $\tilde{F}$ relatif à la valeur propre 1 de la monodromie, que l'on notera $\psi_{\tilde{F},1}$. Supposons que la codimension de Σ_0 soit égale à $n+1$ et que celle de Σ_1 soit égale à n. C'est dans cette hypothèse, qui est "générique", que l'adjectif "consécutif" prend son sens dans l'expression "strates consécutives": Σ_0 est de codimension 1 dans Σ_1. Effectuons une section plane transverse en un point générique de Σ_0 par un plan P de dimension $n+1$. Un tel plan "générique" est non caractéristique pour le $D-$module correspondant au faisceau pervers $\psi_{\tilde{F},1}$ et la restriction $\tilde{f} := \tilde{F}|_P$ vérifie nos hypothèses et décrit la situation locale pour $\psi_{\tilde{F},1}$ dans un voisinage du point générique de Σ_0 que l'on a considéré, grâce au théorème de restriction non caratéristique (voir [B.M.89]) et à la correspondance de Riemann Hilbert (voir [K.84]).

Décrivons les principaux résultats que nous obtenons. La nouveauté principale par rapport au cas d'une valeur propre différente de 1, traité dans [B.91], est l'apparition d'une "cohomologie intermédiaire" pour la partie spectrale relative à la valeur propre 1 de la monodromie, pour la fibre de Milnor de f à l'origine. Nous la noterons par $H^n_{c\cap S}(0)$ et elle est introduite au paragraphe 4. Elle correspond à des cycles évanescents dont la limite à l'origine rencontre le sous-ensemble analytique S suivant un compact (mais la limite peut rencontrer le bord de $f^{-1}(0)$ loin de S). Ceci est précisé dans l'Appendice.
On a alors deux applications naturelles d'élargissement de support

$$H^n_c(0) \overset{can_c}{\rightarrow} H^n_{c\cap S}(0) \overset{can_{c\cap S}}{\rightarrow} H^n(0)$$

dont la composée est l'application canonique usuelle

$$can : H^n_c(0) \rightarrow H^n(0).$$

Dans le cas d'une singularité isolée pour la valeur propre 1, l'application $can_{c\cap S} : H^n_{c\cap S}(0) \rightarrow H^n(0)$ est un isomorphisme. Ce n'est plus le cas sous les hypothèses standards précisées au paragraphe 1 et nous dirons que le phénomène de **suremmêlement pour la valeur propre 1** se produit dans cette situation précisément quand cette application n'est pas un isomorphisme.
En suivant la même ligne de preuve que dans [B.91] nous commencerons par établir le théorème suivant.

Théorème 0.0.1 *Sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1, on a, pour $n \geq 3$, la suite exacte :*

$$0 \to H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0)) \xrightarrow{i} H^n_{c\cap S}(0) \xrightarrow{can_{c\cap S}} H^n(0) \xrightarrow{\theta} H^1(S^*, H^{n-1}(0)).$$

Ce théorème ainsi qu'un résultat analogue pour $n = 2$ sont prouvés au paragraphe 4.
Maintenant l'existence d'une forme hermitienne localement constante et non dégénérée sur le système local $H^{n-1}(0)$ déduite de la forme hermitienne canonique des sections hyperplanes transverses à S^* qui présentent une singularité isolée pour la valeur propre 1 (voir [B.90]), donne l'inégalité[2]

$$\dim H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0)) \leq \dim H^1(S^*, H^{n-1}(0)).$$

On en déduit l'inégalité

$$\dim H^n_{c\cap S}(0) \geq \dim H^n(0).$$

Le résultat le plus difficile sera de démontrer que l'on a, en fait, toujours égalité de ces deux dimensions sous les hypothèses standards, pour $n \geq 3$.

Théorème 0.0.2 *Sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1 et pour* $n \geq 3$ *on a les propriétés suivantes*

- *1)* $\dim H^n_{c\cap S}(0) = \dim H^n(0)$.
- *2) Il existe une application naturelle linéaire et monodromique* $\tilde{var} : H^n_{c\cap S}(0) \to H^n_c(0)$ *qui est un isomorphisme d'espace vectoriels monodromiques.*
- *3) Il existe une forme hermitienne "canonique"*

  $$\mathcal{H} : H^n_{c\cap S}(0) \times H^n(0) \to \mathbb{C}$$

  et elle est non dégénérée.

Pour $n = 2$ *tout ceci reste vrai à condition de remplacer* $H^2_{c\cap S}(0)$ *par son quotient par* $j(H^1(S^*, \mathbb{C}))$*, où* j *est une injection naturelle qui sera définie au paragraphe 4.*

Notre preuve passe par la construction d'une application de variation, compatible aux monodromies

$$var : H^n_{c\cap S}(0) \to H^n_c(0) \ ,$$

[2]Puisque $H^{n-1}(0)$ n'a pas de section non nulle à support l'origine.

construction qui sera menée à bien au paragraphe 6. Nous prouverons ensuite au paragraphe 8 que cette variation est injective. Ceci impliquera l'égalité cherchée puisque la dualité de Poincaré sur la fibre de Milnor à l'origine donne l'égalité des dimensions de $H^n_c(0)$ et $H^n(0)$.
La preuve utilisera, entre autres, la généralisation suivante, intéressante par elle-même mais délicate, du résultat précis de contribution sureffective pour la valeur propre 1 qui est démontré dans [B. 84 b)] pour une fonction à singularité isolée.

Théorème 0.0.3 *Soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe non constant de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit $Y = f^{-1}(0)$ et soit S_1 un sous-ensemble analytique fermé de Y tel qu'en chaque point $y \in Y \setminus S_1$ la monodromie locale de f en y agissant sur la cohomologie (réduite) de la fibre de Milnor de f ne présente pas la valeur propre 1. Supposons que l'on ait $H^n(X \setminus S_1, \mathbb{C}) = 0$.*
Soit w un n-forme méromorphe d-fermée sur X à pôles dans Y induisant une classe non nulle dans $H^n(F, \mathbb{C})$ où F désigne la fibre de Milnor de f en 0. Supposons qu'il existe des formes semi-méromorphes $\tilde{w}$ et γ sur X à pôles dans Y de degrés respectifs n et $n-1$ vérifiant les conditions suivantes :

- *i) Supp $\tilde{w} \cap S_1 = K$ est un compact de X ;*
- *ii) On a sur $X \setminus Y$ $w = \tilde{w} + d\gamma$.*

Alors il existe $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n+1})$ et $j \in [1, n]$ tels que le prolongement méromorphe de l'intégrale

$$\int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \tilde{w} \wedge \rho.\bar{\omega}$$

ait en $\lambda = 0$ un pôle d'ordre ≥ 2 où $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(X)$ vaut identiquement 1 au voisinage de K.

L'injectivité de la variation (qui est donc finalement un isomorphisme grâce à l'égalité des dimensions), donne également la non dégénérescence de la forme hermitienne[3] canonique généralisée :

$$\mathcal{H} : H^n_{c\cap S}(0) \times H^n(0) \to \mathbb{C}.$$

qui est compatible aux monodromies et reliée, comme dans le cas d'une singularité isolée (voir [Loe. 86]) et dans le cas d'une singularité isolée pour

[3]Elle est sesquilinéaire, et $(id \times can_{c\cap S})^*(\mathcal{H})$ est hermitienne sur $H^n_{c\cap S}(0) \times H^n_{c\cap S}(0)$.

la valeur propre 1 (voir [B.97]), à la dualité de Poincaré (hermitienne), notée $<,>$, par la formule

$$\mathcal{H}(e,e') =< \tilde{var}(e), e' > \quad \forall (e,e') \in H^n_{c\cap S}(0) \times H^n(0)$$

où $\tilde{var} = var \circ \Theta$, l'automorphisme Θ de $H^n_{c\cap S}(0)$ étant défini par

$$\Theta := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(T-1)^k}{k+1} = \frac{Log\, T}{T}$$

où T dénote la monodromie. Ceci est montré au paragraphe 7.
Nous concluons en étendant les théorèmes 13 et 14 de [B.91] au cas de la valeur propre 1. On obtient ainsi les deux théorèmes suivants qui, je l'espère, seront suffisants pour donner une approche "filtrée" (donc non localisée en f) du phénomène d'emmêlement de strates dans le cas d'une fonction holomorphe à lieu singulier de dimension 1, au moins dans les cas considérés dans [B.04] et [B.05].

Théorème 0.0.4 *Sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1, notons par k_0 l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur le système local $H^{n-1}(0)$ sur S^*. Considérons $e \in H^n(0)$ vérifiant $\mathcal{N}^k(e) = 0$ avec $k \geq k_0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *1)* $\tilde{ob}_k(e) = 0$.
- *2) Si $w \in \Gamma(Y, Ker\, \delta^n(k))$ vérifie $r^n(k)(w) = e$, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, les fonctionnelles analytiques*

$$P_{k+l}\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \bar{w}_k \wedge \square\big)$$

sont nulles pour $l \geq 2$.

De plus, pour vérifier 2) il suffit de le faire pour $l = 2$ et pour $j \in [0, n]$.

Théorème 0.0.5 *Sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1, supposons que le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda}\square$ admette un pôle d'ordre $\geq k$ en un entier négatif, avec $k \geq \sup(k_0, k_1) + 2$ où k_0 et k_1 sont respectivement les ordres de nilpotence de la monodromie agissant sur le système local $H^{n-1}(0)_{|S^*}$ et sur l'espace vectoriel $H^n(0)$.*

Alors l'ordre des pôles aux entiers négatifs assez grand est exactement égal à k et l'on a $k_0 \leq k_1 = k - 2$ avec $\tilde{ob}_{k_1} \not\equiv 0$.

L'étude de "réciproques" analogues aux théorèmes 15 et 16 de [B.91] n'est pas abordée ici. Ces questions ne semblent pas du tout triviales à résoudre pour la valeur propre 1. D'ailleurs les résultats de ce type dans [B.91] sont probablement les plus délicats de cet article.
Nous n'avons pas, non plus, abordé ici les raffinements de [B.91] qui sont obtenus dans [B.03].

Nous terminons cette étude par un appendice. Il donne une description topologique (à la Milnor) du groupe $H^n_{c\cap S}(0)$.

Voici le plan de cet article

- 1. Définitions et rappels.
- 2. Le cas d'une singularité isolée pour la valeur propre 1.
- 3. La forme hermitienne canonique sur le système local $H^{n-1}(0)|_{S^*}$.
- 4. L'espace vectoriel monodromique $H^n_{c\cap S}(0)$.
- 5. La suite exacte longue de J. Leray généralisée.
- 6. Construction de $\tilde{var} : H^n_{c\cap S}(0) \to H^n_c(0)$.
- 7. La forme hermitienne canonique $\mathcal{H} : H^n_{c\cap S}(0) \times H^n(0) \to \mathbb{C}$.
- 8. Injectivité de la variation pour $n \geq 3$. Le cas $n = 2$.
- 9. Applications et un exemple pour conclure.
- Appendice : Description topologique de $H^n_{c\cap S}(0)$.

1 Définitions et rappels.

1.1 Les hypothèses standards pour la valeur propre 1.

Soit X un voisinage ouvert de Stein connexe de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et supposons que $n \geq 2$. Dans le cas $n = 1$ le phénomène d'emmêlement de strates pour la valeur propre 1 que nous allons étudier n'apparaît pas, même pour une fonction non réduite. Le cas où $n = 1$ sera considéré dans la suite sous l'hypothèse plus forte d'une singularité isolée pour la valeur propre 1 (notion déjà étudiée dans [B.90] et [B.97]). Ce cas sera essentiel quand on étudiera la situation d'une section hyperplane transverse en un

point générique de la courbe S.
Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Notons pour $p \geq 0$ par $H^p(0)$ le faisceau constructible sur $Y := f^{-1}(0)$ donné par le sous-faisceau spectral de la monodromie de f pour la valeur propre 1, agissant sur le $p-$ième faisceau de cohomologie du complexe ψ_f des cycles évanescents. Donc le germe en chaque point $y \in Y$ de $H^p(0)$ est le sous-espace spectral pour la valeur propre 1 de la monodromie agissant sur le $p-$ième groupe de la cohomologie réduite de la fibre de Milnor de f en y.
Nous ferons les hypothèses suivantes :

- (i) Le faisceau $H^n(0)$ est concentré à l'origine.
- (ii) Le faisceau $H^{n-1}(0)$ est concentré sur une courbe S admettant l'origine pour unique point singulier. De plus, chaque composante irréductible de S contient l'origine et est un disque topologique.
- (iii) La restriction de $H^{n-1}(0)$ à $S^* := S \setminus \{0\}$ est un système local.
- (iv) Pour tout $i \geq 2$ on suppose que $H^{n-i}(0) \equiv 0$.

Remarques.

- Seule la condition (iv) est réellement restrictive dans notre situation locale d'un germe à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ en raison de la perversité de $\psi_{f,1}$.
- Bien sur, ces hypothèses sont satisfaites (quitte à se restreindre à un voisinage ouvert de l'origine assez petit) dès que le lieu singulier est de dimension inférieur ou égal à 1. Pour $n = 2$ c'est le cas dès que l'on considère un germe non constant de fonction holomorphe qui est réduit.
- Pour $n = 3$ ces hypothèses seront satisfaites (quitte à nouveau à se restreindre ...) pour un germe réduit dès que les singularités transverses aux composantes irréductibles de dimension 2 du lieu singulier sont des courbes réduites et irréductibles[4].

[4]En effet, pour une courbe plane réduite et irréductible, la valeur propre 1 de la monodromie n'apparait pas.

1.2

Sous les hypothèses standards, introduisons les complexes de faisceaux $(\Omega^\bullet(k), \delta_0)$ et $(\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$. Rappelons que $\Omega^\bullet$ (resp. $\mathcal{E}^\bullet$) désigne le faisceau des formes méromorphes (resp. semi-méromorphes) de degré $^\bullet$ sur X à pôles dans Y restreint (topologiquement) à Y, que

$$\Omega^\bullet(k) := \Omega^\bullet \otimes \mathbb{C}^k, \quad \mathcal{E}^\bullet(k) := \mathcal{E}^\bullet \otimes \mathbb{C}^k$$

et que

$$\delta_0(w) := dw - \frac{df}{f} \wedge \ {}_kN(w)$$

où ${}_kN \in End(\mathbb{C}^k)$ est défini dans la base canonique $e_1, \cdots, e_k$ par ${}_kN(e_j) = e_{j+1}, j \in [1,k]$ avec la convention $e_{k+1} = 0$; cet endomorphisme agit sur $\Omega^\bullet(k)$ (resp. sur $\mathcal{E}^\bullet(k)$) par ${}_k\mathcal{N} := Id \otimes {}_kN$.
Ceci se "visualise" de la façon suivante :

$$\delta_0(w) = \delta_0 \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dw_k - \frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \\ \vdots \\ dw_2 - \frac{df}{f} \wedge w_1 \\ dw_1 \end{pmatrix}.$$

De plus l'inclusion évidente de $(\Omega^\bullet(k), \delta_0)$ dans $(\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme (voir [B.91], prop.1, p.444.)

On a les morphismes de complexes de degré 0 suivants, pour tout couple (k, k') d'entiers :

$$\pi_{k+k',k} : (\mathcal{E}^\bullet(k+k'), \delta_0^\bullet) \longrightarrow (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$$
$$j_{k,k+k'} : (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0^\bullet) \longrightarrow (\mathcal{E}^\bullet(k+k'), \delta_0^\bullet)$$

donnés par les projections et injections évidentes :

$$\mathbb{C}^{k+k'} \simeq \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{k'} \to \mathbb{C}^k$$
$$\mathbb{C}^k \hookrightarrow \mathbb{C}^{k+k'} \simeq \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{k'}.$$

Ils se "visualisent" de la façon suivante :

$$\pi_{k+k',k} \begin{pmatrix} w_{k+k'} \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} \qquad j_{k,k+k'} \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où le dernier vecteur colonne comprend k' zéros.

On définit également, pour $k \geq 1$, le morphisme de complexe de degré 0 :

$${}_k\mathcal{N} : (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0^\bullet) \to (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$$

en posant ${}_k\mathcal{N} = j_{k-1,k} \circ \pi_{k,k-1}$; ce qui se "visualise" comme suit :

$${}_k\mathcal{N} \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ \vdots \\ w_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a, bien sur, $({}_k\mathcal{N})^k = 0$ sur $\mathcal{E}^\bullet(k)$. La monodromie est alors définie sur ce complexe par $T := exp(-2i\pi.{}_k\mathcal{N})$.

Enfin nous utiliserons également les morphismes de complexes[5] de degré $+1$

$$\tau_{k,k'} : (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0^\bullet) \to (\mathcal{E}^\bullet(k'), \delta_0^\bullet)$$

donnés par :

$$\tau_{k,k'} \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{df}{f} \wedge w_k \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} k'.$$

1.3

Notons par $h^i(k)$ le i-ème faisceau de cohomologie du complexe $(\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0)$. Le morphisme de complexe

$$r^\bullet : (\Omega^\bullet(k), \delta_0) \to (\Omega^\bullet_{X/f}[f^{-1}], d_{/f})|_Y$$

défini par $\tilde{r}^\bullet(w) = w_k$ pour $w \in \Omega^\bullet(k)$, donne la suite exacte courte suivante, pour tout $p \geq 1$ (voir la prop.1 p. 427-428 de [B.91] et la proposition (1.9) pour le lien entre $\tilde{r}^\bullet$ et $r^\bullet$) :

$$0 \to H^{p-1}(0)/Im\mathcal{N}^k_{p-1} \to h^p(k) \stackrel{r^p(k)}{\to} Ker\mathcal{N}^k_p \to 0 \tag{1}$$

oú $-2i\pi\mathcal{N}_q$ désigne le logarithme nilpotent de la monodromie de f agissant[6] sur le faisceau $H^q(0)$ pour $q \geq 0$. On prendra garde que pour $q = 0$ on

[5] En fait on a $\tau_{k,k'} \circ \delta_0 + \delta_0 \circ \tau_{k,k'} = 0$.

[6] de façon unipotente.

considère la cohomologie réduite (donc les "vrais" cycles évanescents et non les cycles proches.)

Sous les hypothèses standards la suite exacte (1) montre que les seuls faisceaux de cohomologie non nuls du complexe $(\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0)$ sont les $h^i(k)$ pour $i = 0, 1, n-1, n, n+1$.
Supposons d'abord $n \geq 3$. On a alors des isomorphismes monodromiques $\underline{\mathbb{C}}_Y \simeq h^0(k)$ et $\underline{\mathbb{C}}_Y \simeq h^1(k)$ donnés par

$$\lambda \in \underline{\mathbb{C}}_Y \to \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \in \underline{\mathbb{C}}_Y \to \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ \lambda \frac{df}{f} \end{pmatrix}.$$

Le morphisme τ_k induit l'isomorphisme évident .
De plus, grace à la nullité de $H^{n-2}(0)$, on a un isomorphisme

$$r^{n-1}(k) : h^{n-1}(k) \to Ker\, \mathcal{N}^k_{n-1} \subset H^{n-1}(0) \quad \forall k \geq 1$$

ainsi que la suite exacte pour $k' \gg 1$

$$0 \to h^{n-1}(k') \overset{\tau_{k',k}}{\to} h^n(k) \to Ker\, \mathcal{N}^k_n \to 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Comme les faisceaux $h^{n-1}(0)$ et $h^n(0)$ sont à support dans S et que $H^n(0)$ est à support l'origine, on en déduit que sur S^* on a un isomorphisme pour $k \gg 1$

$$\tau_k : h^{n-1}(k)|_{S^*} \simeq h^n(k)|_{S^*}.$$

Alors, la suite exacte pour $k \gg 1$

$$0 \to H^{n-1}(0) \overset{i^{n-1}}{\to} h^n(k) \overset{\tau_k}{\to} h^{n+1}(k) \to 0$$

montre que $h^{n+1}(k)$ est à support l'origine et isomorphe à $H^n(0)$ (pour $k \gg 1$).

1.4

Pour $n = 2$, on a la suite exacte

$$0 \to h^0(k) \overset{\tau_k}{\to} h^1(k) \overset{r^1(k)}{\to} Ker\, \mathcal{N}^k_1 \to 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Comme τ_k induit un isomorphisme sur $Y \setminus S$ (et les faisceaux $h^i(k)|_{Y\setminus S}$ sont isomorphes à $\underline{\mathbb{C}}_{Y\setminus S}$, $i = 0, 1$), on aura dans ce cas des isomorphismes monodromiques $h^1(k)\big/\tau_k h^0(k) \simeq Ker\,\mathcal{N}_1^k \subset H^1(0)$ ainsi que $h^0(k) \simeq \underline{\mathbb{C}}_Y$. Pour $n = 2$ on remplacera l'isomorphisme $r^{n-1}(k) : h^{n-1}(k) \to H^{n-1}(0)$ dû à la nullité de l'application $\tau_k : h^{n-2}(k) \to h^{n-1}(k)$ que l'on a pour $n \geq 3$ par l'isomorphisme

$$\lim_{k\to\infty} h^1(k) \to H^1(0)$$

qui résulte de l'isomorphisme monodromique (plus concret) pour $k \geq k_0$

$$r^1(k+1) : j_{k,k+1}(h^1(k)) \to H^1(0).$$

Comme l'application τ_k n'est pas compatible à la limite inductive sur k, il sera plus commode d'utiliser directement l'isomorphisme

$$\lim_{k\to\infty} h^1(k) \simeq H^1(0)$$

que la suite exacte

$$0 \to h^0(k) \xrightarrow{\tau_k} h^1(k) \xrightarrow{r^1(k)} Ker\,\mathcal{N}_1^k \to 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Ce point est important puisqu'il permettra de traiter le cas $n = 2$ de façon assez analogue au cas "général" $n \geq 3$.

1.5

On déduit alors facilement de la constructibilité des faisceaux $h^i(k)$ et de la contractibilité de Y la propriété suivante[7] :

$$\mathbb{H}^n(Y, (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet))\big/\tau_k\big(\mathbb{H}^{n-1}(Y, (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet))\big) \quad \simeq Ker\,\mathcal{N}_n^k \subset H^n(0)$$

Nous allons établir directement une assertion analogue pour les supports compacts ; cette approche directe s'applique également aux supports fermés. Par contre la dégénérescence de la suite spectrale évoquée dans ce cas n'est plus vraie pour les supports compacts. Par ailleurs ceci motivera notre définition de l'espace vectoriel monodromique $H^n_{c\cap S}(0)$ et rendra "évidente" les applications "naturelles" $H^n_c(0) \to H^n_{c\cap S}(0)$ et $H^n_{c\cap S}(0) \to H^n(0)$.

Proposition 1.5.1 *Pour chaque* $k \geq 1$, *on a une application surjective*

$$r^n_c(k) : \mathbb{H}^n_c(Y, (\mathcal{E}(k)^\bullet, \delta^\bullet)) \to Ker\,\mathcal{N}^k_{n,c} \subset H^n_c(0)$$

[7]Nous omettrons dorénavant l'indice de la différentielle $\delta = \delta_0$.

dont le noyau contient $\tau_k\ \mathbb{H}^{n-1}_c(Y,(\mathcal{E}(k)^\bullet,\delta^\bullet))$.
Ces applications vérifient $r^n_c(k)\circ {}_k\mathcal{N}=\mathcal{N}_{n,c}\circ r^n_c(k)$ *et elles sont compatibles aux applications* $j_{k,k+k'}$.
De plus, ces applications induisent un isomorphisme monodromique entre $\lim\limits_{k\to\infty}\ \mathbb{H}^n_c(Y,(\mathcal{E}(k)^\bullet,\delta^\bullet))$ *et* $H^n_c(0)$.

Preuve. En fait il est plus facile de définir l'application

$$\tilde{r}^n_c(k):\mathbb{H}^n_c(Y,(\mathcal{E}(k)^\bullet,\delta^\bullet))\to Ker\,\mathcal{N}^k_{n,c}\subset H^n_c(0)$$

qui est reliée à $r^n_c(k)$ par la formule $r^n_c(k)=exp(-\mathcal{N}_{n,c}.Log(s_0))\circ\tilde{r}^n_c(k)$, où $F:=f^{-1}(s_0)$ est la fibre de Milnor de f à l'origine, et où $s_0\in D\cap\mathbb{R}^{+*}$ est un point base (et on a fixé $Log(s_0)\in\mathbb{R}$.)
Comme $exp(-\mathcal{N}_{n,c}.Log(s_0))$ est un automorphisme de $H^n_c(0)$ compatible avec la monodromie $T_c=exp(-2i\pi.\mathcal{N}_{n,c})$ il suffit de prouver la proposition pour l'application $\tilde{r}^n_c(k)$[8].
Pour $w\in\Gamma_{c/f}(X,\mathcal{E}^n(k))\cap Ker\,\delta$ posons

$$\tilde{r}^n_c(k)[w]=[w_k|_F]\in H^n_c(0). \tag{2}$$

En effet, la relation $\delta w=0$ donne $dw_k=\frac{df}{f}\wedge w_{k-1}$ ce qui montre que la restriction de w à F est bien d-fermée (et à support compact).
Pour voir la surjectivité, il suffit de constater que si $e\in H^n_c(0)$ vérifie $\mathcal{N}^k_c(e)=0$ alors $\varepsilon:=\sum_0^{k-1}\frac{(Logs)^j}{j!}\mathcal{N}^j_c(e)$ est une section uniforme du fibré de Gauss-Manin à support propre de f qui se calcule à l'aide du complexe $(\mathcal{E}^\bullet,\delta^\bullet)$ (voir [B.91] Prop.1 p.444) ce qui permet de trouver un antécédent à e de la même façon que dans le cas à support fermé.
Pour démontrer la relation $r^n_c(k)\circ{}_k\mathcal{N}=\mathcal{N}_{n,c}\circ r^n_c(k)$ nous devons montrer que, si $\delta w=0$ on a $[w_{k-1}|_F]=\mathcal{N}_c([w_k|_F])$.
Notons

$$\tilde{X}:=X\underset{D}{\times}H$$

où $H\overset{exp}{\to}D^*$ est le revêtement universel.
D'après Milnor [Mi.68] on a un isomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ au dessus de D^*
$\Phi:\tilde{X}\to F\times H$. La n-forme $\mathcal{C}^\infty$

$$\Omega:=\sum_0^{k-1}\frac{(-1)^j}{j!}.(\zeta-Log(s_0))^j.\tilde{w}_{k-j}$$

[8]Pour une discussion plus détaillée de la relation entre $r^n(k)$ et $\tilde{r}^n(k)$ on pourra consulter la Remarque/Erratum qui suit le Corollaire 1 du Théorème 1 de [B.02].

où $\tilde{w_h} = ((\Phi)^{-1})^*(w_h)$ vérifie $d\Omega = 0$ sur $F \times H$. Elle vérifie également $\Omega|_{F\times\{Log(s_0)\}} = w_k|_F$. On en déduit que

$$T_c(w_k|_F) = exp(-2i\pi.\mathcal{N}_c)(w_k|_F) = \sum_0^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!}(2i\pi)^j w_{k-j}|_F.$$

On obtient alors facilement (par récurrence) la relation désirée.
La compatibilité des applications $r_c^n(k)$ avec les morphismes $j_{k,k+k'}$ est immédiate.
Nos assertions sur le noyau se déduisent facilement du lemme suivant.

Lemme 1.5.2 *On utilise les notations introduites ci-dessus. Considérons* $w \in \Gamma_c(Y, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\,\delta$, *supposons que l'on ait* $r_c^n(k)([w]) = 0$ *et qu'il existe* $v \in \Gamma_c(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$ *vérifiant* ${}_k\mathcal{N}(w) = \delta v$. *Alors*

$$j_{k,k+1}(w) = \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \delta\Gamma_c(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k+1)).$$

Preuve. Commençons par traiter le cas $k = 1$. La condition sur $\mathcal{N}_c(w)$ est vide, et on a seulement $dw_1 = 0$ et $[w_1|_F] = 0$. Mais alors w_1 est une section horizontale du fibré de Gauss-Manin à support propre de f qui est nulle en s_0. Elle est donc nulle, et on peut écrire

$$w_1 = \frac{df}{f} \wedge \alpha + d\beta$$

où $\alpha, \beta \in \Gamma_{c/f}(X, \mathcal{E}^{n-1}(1))$. On a alors $\frac{df}{f} \wedge d\alpha = 0$, ce qui montre que α est une section du fibré de Gauss-Manin à support propre de f de degré $n-1$. Mais ce fibré (méromorphe) est nul, car on a $H_c^{n-1}(F) = 0$ puisque F est une variété de Stein de dimension n. On peut donc écrire

$$\alpha = \frac{df}{f} \wedge \gamma + d\xi$$

où $\gamma, \xi \in \Gamma_{c/f}(X, \mathcal{E}^{n-2}(1))$. On a donc

$$w_1 = \frac{df}{f} \wedge d\xi + d\beta = d(\beta - \frac{df}{f} \wedge \xi).$$

On obtient alors $w_1 = \delta\tilde{\beta}$ où $\tilde{\beta} \in \Gamma_{c/f}(X, \mathcal{E}^{n-1}(1))$.

Passons au cas général. La relation $\,_k\mathcal{N}(w) = \delta v$ donne

$$w_{k-1} = dv_k - \frac{df}{f} \wedge w_{k-2}$$

et $\delta w = 0$ donne $dw_k = \frac{df}{f} \wedge w_{k-1}$. On aura donc $dw_k = \frac{df}{f} \wedge dv_k$. La n-forme semi-méromorphe $w_k + \frac{df}{f} \wedge v_k$ est donc $d-$fermée à support $f-$propre et induit 0 dans $H^n_c(0)$. D'après le cas $k = 1$ on peut écrire

$$w_k = -\frac{df}{f} \wedge v_k + d\tilde{\beta}.$$

On aura alors

$$j_{k,k+1}(w) = \begin{pmatrix} w_k \\ w_{k-1} \\ \vdots \\ w_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \tilde{\beta} \\ v_k \\ \vdots \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

ce qui achève la preuve du lemme et de la proposition 1.5.1. ■

Remarque.

Comme on a $j_{k,k+k'} \circ \tau_k = 0$ pour $k' \geq k$ il est inutile de quotienter par $\tau_k\big(\mathbb{H}^{n-1}_c(Y, (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet))\big)$ avant de prendre la limite inductive sur k .

1.6

Nous considérerons également le complexe de faisceaux sur Y noté $(\mathcal{F}^\bullet(k), \delta^\bullet_0)$, défini pour $n \geq 3$ comme suit :

$$(\mathcal{F}^\bullet(k), \delta^\bullet_0) := \ \mathcal{E}^0(k) \xrightarrow{\delta_0} Ker\, \delta^1_0 \to 0 \to 0 \cdots$$

On a une inclusion naturelle de complexes $(\mathcal{F}(k)^\bullet, \delta^\bullet_0) \to (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet_0)$
Nous noterons par $(\check{\mathcal{E}}^\bullet(k), \delta^\bullet_0)$ le complexe quotient ; ce qui donne de façon explicite :

$$(\check{\mathcal{E}}^\bullet(k), \delta^\bullet_0) := \ 0 \to \mathcal{E}^1(k)/Ker\, \delta^1_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{E}^2(k) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{E}^3(k) \xrightarrow{\delta_0} \cdots$$

Le complexe $(\check{\mathcal{E}}^\bullet(k), \delta^\bullet_0)$ n'aura sur Y^* que deux faisceaux de cohomologie non nuls, comme c'était le cas pour le complexe $(\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet_u)$ pour une valeur propre différente de 1.
Ceci nous permettra d'utiliser sur S^* la proposition 2 p.435 de [B.91].

Pour $n = 2$ nous définirons le complexe $(\mathcal{F}^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$ en remplaçant dans la définition précédente le faisceau $Ker\,\delta_0^1$ par le sous-faisceau

$$\delta_0\mathcal{E}^0(k) + \tau_k h^0(k) \hookrightarrow Ker\,\delta_0^1(k).$$

De même nous remplacerons dans la définition de $(\check{\mathcal{E}}^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$ le quotient $\mathcal{E}^1(k)/Ker\,\delta_0^1$ par

$$\mathcal{E}^1(k)\big/\delta_0\mathcal{E}^0(k) + \tau_k h^0(k).$$

Ceci conduit à nouveau au fait que le complexe $(\check{\mathcal{E}}^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$ ait deux faisceaux de cohomologie non nuls sur Y^* isomorphes à $h^1(k)/\tau_k(h^0(k)$ et $h^2(k)$ en degrés $n - 1 = 1$ et $n = 2$ respectivement.
Le quotient $\mathcal{E}^1(k)\big/\delta_0\mathcal{E}^0(k) + \tau_k h^0(k)$ n' a pas la cohomologie sur S^* en degrés positifs. En effet, on a

$$\delta_0\mathcal{E}^0(k) \cap \tau_k(h^0(k)) \simeq 0$$

On en déduit facilement que $\forall i \geq 1$

$$H^i(S^*, \mathcal{E}^1(k)\big/\delta_0\mathcal{E}^0(k) + \tau_k h^0(k)) \simeq H^{i+1}(S^*, h^0(k)) \oplus H^{i+1}(S^*, \delta_0\mathcal{E}^0(k)) \simeq 0.$$

On pourra donc encore utiliser sur S^* la proposition 2 p.435 de [B.91] pour décrire l'hypercohomologie sur S^* du complexe $(\check{\mathcal{E}}^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$.

2 Le cas d'une singularité isolée pour la valeur propre 1 .

2.1

Considérons ici le cas où on a $n \geq 1$ et où l'on suppose que les faisceaux $H^p(0)$ sont tous nuls pour $p \neq n$. Quitte à choisir le représentant de Milnor de notre germe assez petit on peut également supposer que le faisceau $H^n(0)$ est concentré à l'origine. On a alors les résultats suivants.

Théorème 2.1.1 *(voir [B. 90]) Soit* $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *un germe de fonction holomorphe présentant une singularité isolée à l'origine pour la valeur propre 1 de la monodromie*[9]*. Il existe une forme hermitienne* h *sur* $H^n(0)$*, non dégénérée, invariante par la monodromie, définie de la façon suivante :*

[9] Donc $H^p(0) = 0$ pour $p \neq n$ puisque, par perversité, seul le faisceau $H^n(0)$ peut avoir un support de dimension 0.

Soient $e, e' \in H^n(0)$ vérifiant $\mathcal{N}^k(e) = \mathcal{N}^k(e') = 0$ où on a noté par $-2i\pi.\mathcal{N}$ le logarithme nilpotent de la monodromie (unipotente) agissant sur $H^n(0)$. Soient $w, w' \in H^n(\Gamma(X, \mathcal{E}^\bullet(k)), \delta_0^\bullet)$ vérifiant $r^n(k)(w) = e$ et $r^n(k)(w') = e'$. Alors on a

$$(2i\pi)^{n+1}.h(e,e') = P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda}\rho.\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge \bar{w'}_k\big)$$

pour $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ vérifiant $\rho \equiv 1$ près de l'origine.

On a noté $P_2(\lambda = 0, F(\lambda))$ le coefficient de $\frac{1}{\lambda^2}$ dans le développement de Laurent en $\lambda = 0$ de la fonction méromorphe F.
On utilisera dans cet article, comme on l'a déjà fait dans [B.97], les complexes $(\Omega^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$ pour le cas méromorphe et $(\mathcal{E}^\bullet(k), \delta_0^\bullet)$ pour le cas semi-méromorphes au lieu de ceux correspondants à la differentielle $\delta_1^\bullet$ de la différentielle (utilisés dans [B.90]) ce qui explique que l'énoncé ci-dessus diffère de celui de [B.90] (en particulier par "l'évaluation en $\lambda = 0$ "). Nous renvoyons à [B.91], aux rappels donnés dans [B.97] paragraphe 2 ou au paragraphe 1.3 ci-dessus pour plus de précisions sur ces complexes et sur l'application $r^n(k)$.
La forme hermitienne définie ci-dessus dans le cas d'une singularité isolée pour la valeur propre 1 de la monodromie sera appelée la forme hermitienne canonique.

Dans le cas d'une singularité isolée, la forme hermitienne canonique a été introduite dans [B.85]. François Loeser [Loe.86] a montré dans ce cas, en utilisant des résultats de théorie de Hodge, comment construire la forme hermitienne canonique à partir de la variation et de la dualité (hermitienne) de Poincaré sur la fibre de Milnor. Ceci a été généralisé au cas d'une singularité isolée pour la valeur propre 1 (sans théorie de Hodge, car elle ne semble pas facilement applicable dans ce contexte plus général) dans [B.97]. Rappelons les énoncés correspondants.

Théorème 2.1.2 *(voir [B.97]) Soit $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe présentant une singularité isolée à l'origine pour la valeur propre 1 de la monodromie. Il existe une application linéaire "naturelle" de variation $var : H^n(0) \to H_c^n(0)$ vérifiant les propriétés suivantes:*

- *0) Si la singularité de f est isolée[10], on retrouve la variation "classique" (voir [A.V.G.]).*

[10] Au sens "usuel", c'est à dire que l'on a $df_x \neq 0$ pour $x \neq 0$.

- *1) L'application "var" est topologique et on a*

$$can \circ var = T - 1 \quad \text{sur} \quad H^n(0) \qquad var \circ can = T_c - 1 \quad \text{sur} \quad H^n_c(0)$$

où $can : H^n_c(0) \to H^n(0)$ *est l'oubli des supports et où* T *(resp.* T_c*) désigne la monodromie agissant sur* $H^n(0)$ *(resp. sur* $H^n_c(0)$ *).*

- *2) L'application "var" est bijective,* $T-$*invariante (c'est à dire que* $T_c \circ var = var \circ T$*), et auto-adjointe pour la dualité (hermitienne) de Poincaré* $\mathcal{I} : H^n(0) \times H^n_c(0) \to \mathbb{C}$ *donnée par*

$$\mathcal{I}(a,b) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_F a \wedge \bar{b},$$

où F *désigne la fibre de Milnor de* f *en* 0.

- *3) Soit* $\Theta := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(T-1)^k}{k+1}$. *C'est un automorphisme de* $H^n(0)$ *puisque* T *est unipotent. Posons* $\tilde{var} := var \circ \Theta$. *Alors on a*

$$\forall e, e' \in H^n(0), \quad h(e,e') = \mathcal{I}(\tilde{var}(e), e').$$

On déduit facilement des propriétés ci-dessus que l'on a

$Im\ can = Im\ (T-1)$ dans $H^n(0)$ et $Ker\ can = Ker\ (T_c - 1)$ dans $H^n_c(0)$.

Comme nous aurons besoin plus loin de construire une généralisation de l'application de variation, nous allons rappeler ici brièvement l'expression de l'application $\tilde{var}$ donnée dans [B.97] en terme de formes différentielles semi-méromorphes.
Soit donc $e \in H^n(0)$ vérifiant $\mathcal{N}^k(e) = 0$. Soit $w \in \Gamma(Y, \mathcal{E}^n(k))$ satisfaisant $\delta_0(w) = 0$ et $r^n(k) = e$. L'hypothèse de singularité isolée pour la valeur propre 1 permet alors de trouver $u \in \Gamma(Y^*, \mathcal{E}^{n-1}(k))$ vérifiant

$${}_kN\, w|_{Y^*} = \delta_0\, u.$$

Soit $\rho \in \mathcal{C}^\infty_{c/f}(X)$ vérifiant $\rho \equiv 1$ près de l'origine. Posons $\xi = (1-\rho).u$. Alors on a $\xi \in \Gamma_c(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$ et $v = {}_kN\, w - \delta_0\, \xi$ est dans $\Gamma_c(Y, Ker\, \delta_0^n(k))$. On a donc, pour $j \in [1,k]$, avec la convention $w_0 = 0 = \xi_0$:

$$w_{j-1} = v_j + d\xi_j - \frac{df}{f} \wedge \xi_{j-1}\ ;$$

et comme $\delta_0\, w = 0$ implique $dw_k = \frac{df}{f} \wedge w_{k-1}$ on aura

$$d(w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k) = \frac{df}{f} \wedge v_k.$$

Choisissons maintenant une fonction $\sigma \in \mathcal{C}^{\infty}_{c/f}(X)$ vérifiant $\sigma \equiv 1$ sur un ouvert de Y contenant $(Supp\, v) \cap Y$. Alors le théorème de Leray généralisé au cas d'une hypersurface non nécessairement lisse mais ne présentant pas la valeur propre 1 pour la monodromie[11], permet d'écrire au voisinage du bord de la boule de Milnor

$$d\sigma \wedge (w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k) = \frac{df}{f} \wedge \eta + \omega + d\alpha$$

avec η et ω d-fermées et $\mathcal{C}^{\infty}$ à support $f-$propres de degrés respectifs n et $n+1$, et où α est semi-méromorphe de degré n à pôles dans Y et à support $f-$propre. On obtient alors que la section $V(w) \in \Gamma_c(Y, \mathcal{E}^n(k))$ définie par

$$\begin{aligned} &V(w)_k = v_k + \eta \\ &V(w)_j = v_j \qquad \text{pour} \quad j \in [1, k-1] \end{aligned}$$

est δ_0-fermée et on a $r^n(k)(V(w)) = v\tilde{a}r(e)$. Pour plus de détails, on consultera [B.97], ou bien la construction de la variation généralisée donnée au paragraphe 6.

3 La forme hermitienne canonique sur le système local $H^{n-1}(0)|_{S^*}$.

L'objectif de ce troisième paragraphe est de généraliser à notre situation la proposition 11 de [B.91].

3.1

Considérons donc le système local $H^{n-1}(0)$ sur S^*. Sa fibre en chaque point $\sigma \in S^*$ s'identifie au sous-espace spectral pour la valeur propre 1 du $(n-1)-$ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de la restriction de f à une section hyperplane transverse à S^* en σ. Comme la restriction de f à un tel hyperplan a une singularité isolée pour la valeur propre 1 en σ, ce sous-espace spectral pour la valeur propre 1 de ce $(n-1)-$ième groupe de cohomologie est muni d'une forme hermitienne canonique qui est non dégénérée et invariante par la monodromie de f. Ceci permet, en raisonnant comme dans [B.91] p.456, de munir le système local (d'espaces vectoriels

[11] Ce point est détaillé dans [B.97] ; il sera repris et généralisé plus loin; voir le 5.

monodromiques) $H^{n-1}(0)|_{S^*}$ d'une forme hermitienne localement constante, non dégénérée et invariante par la monodromie[12]. Nous la noterons par

$$h : H^{n-1}(0)|_{S^*} \times H^{n-1}(0)|_{S^*} \to \mathbb{C}_{S^*}.$$

On montre comme au lemme 1 de [B.91] p.456 que cette forme hermitienne est intrinsèque. La proposition suivante se démontre de façon analogue à la proposition 1 de [B.91] p.457.

Proposition 3.1.1 *On se place sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1. Soit* V *un ouvert de* $X^* := X \setminus \{0\}$ *et soient* w *et* w' *deux sections sur* V *du faisceau* $\mathcal{E}^{n-1}(k)$ *vérifiant* $\delta(w) = \delta(w') \equiv 0$*. Notons par* e *et* e' *les sections correspondantes de* $H^{n-1}(0)$ *sur* $U := V \cap S^*$ *(via le morphisme* $r^{n-1}(k)$*). Alors la fonction* $h(e, e')$ *est localement constante sur* U*. Pour chaque forme différentielle* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(V)$ *de degré 2 vérifiant :*

- *i)* $\mathrm{Supp}\,\varphi \cap S^*$ *est compact,*
- *ii)* $d\varphi = 0$ *au voisinage de* U *dans* X^**,*

on aura la formule :

$$(2i\pi)^n \int_U h(e,e').\varphi = P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} w_k \wedge \bar{w'}_k \wedge \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}}\big).$$

Quitte à remplacer la formule (1) p.409 de [B.91] donnant l'expression de la forme (hermitienne) d'intersection comme résidu dans le prolongement analytique de la distribution $|f|^{2\lambda}$ par la formule du théorème 2.1.1, la preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition 1 de [B.91] p.457-460 .

Remarque.

Pour $n = 2$ il n'est pas à priori automatique de pouvoir représenter une section sur $U := V \cap S^*$ du faisceau $H^1(0)$ par un élément de $\Gamma(V, Ker\,\delta^1(k))$ pour $k \gg 1$, car cela nécessite la surjectivité des applications

$$H^0(V, Ker\,\delta^1(k)) \to H^0(V, h^1(k)) \to H^0(V, H^1(0)).$$

L'isomorphisme $h^1(k)\big/\tau_k(h^0(k)) \to H^1(0)$ pour $k \gg 1$, montre que l'on a une obstruction à la surjectivité de la seconde flèche. En fait le décalage

[12]On prendra garde qu'à l'origine, cette construction n'a, à priori, pas de sens.

sur k suffit à lever cette obstruction puisque $\lim_{k\to\infty} h^1(k) \to H^1(0)$ est un isomorphisme.
La surjectivité de la première flèche est realisée dès que l'on a la nullité de $H^1(V, \delta\mathcal{E}^0(k))$, ce qui sera toujours vrai quitte à prendre pour V un voisinage ouvert assez petit de U, car on a

$$H^1(V, \delta\mathcal{E}^0(k)) \simeq H^2(V, h^0(k)) \simeq H^2(U, \mathbb{C}) = 0.$$

En utilisant le cycle fondamental de S^* qui est l'élément de $H_1(S^*, \mathbb{Z})$ obtenu en coupant S^* par une sphère centrée à l'origine de rayon assez petit, on obtient, un accouplement sesquilinéaire non dégénéré

$$\tilde{h} : H^0(S^*, H^{n-1}(0)) \times H^1(S^*, H^{n-1}(0) \to \mathbb{C}.$$

Pour donner une formule analytique donnant le nombre $\tilde{h}(e, e')$ analogue à la proposition 11 de [B.91], nous devons commencer par définir l'analogue des applications $\tilde{\theta}_k$ et $\tilde{ob}_k$ de loc. cit.

3.2 Les applications $\tilde{\theta}_k$ et $\tilde{ob}_k$.

Définissons l'entier k_0 comme l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur le système local $H^{n-1}(0)|_{S^*}$. Comme l'application de restriction $\Gamma(S, H^{n-1}(0)) \to \Gamma(S^*, H^{n-1}(0))$ est injective (perversité), k_0 majore également l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur la fibre à l'origine de $H^{n-1}(0)$.

Définition 3.2.1 *Sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1 et pour $n \geq 3$, notons par $-2i\pi\mathcal{N}_n$ le logarithme nilpotent de la monodromie agissant sur $H^n(0)$. Pour chaque $k \geq k_0$ on a deux applications linéaires naturelles*

$$\tilde{ob}_k : Ker\,\mathcal{N}_n^k \to H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$$
$$\tilde{\theta}_k : Ker\,\mathcal{N}_n^k \to H^1(S^*, H^{n-1}(0)) \simeq H^2_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$$

qui sont définies de la façon suivante :

- *La composée de $\mathbb{H}^n(Y, (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet)) \to \mathbb{H}^n(S^*, (\check{\mathcal{E}}^\bullet(k))$ avec*

$$\mathbb{H}^n(S^*, (\check{\mathcal{E}}^\bullet(k), \delta^\bullet)) \xrightarrow{ob_k} H^0(S^*, H^{n-1}(0)) \xrightarrow{\partial} H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$$

  passe au quotient par $\tau_k\, \mathbb{H}^{n-1}(Y, (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet))$ et donne $\tilde{ob}_k$, grâce aux isomorphismes rappelés plus haut ; voir (1.5).

- *La composée*

$$\mathbb{H}^n(Y,(\mathcal{E}^\bullet(k),\delta^\bullet)) \to \mathbb{H}^n(S^*,(\check{\mathcal{E}}^\bullet(k),\delta^\bullet)) \xrightarrow{\theta_k} H^1(S^*,H^{n-1}(0))$$

passe également au quotient par $\tau_k\ \mathbb{H}^{n-1}(Y,(\mathcal{E}^\bullet(k),\delta^\bullet))$ *et donne* $\tilde{\theta}_k$.

Ces résultats sont analogues à ceux des pages 410 et 411 de [B.91], le complexe $(\check{\mathcal{E}}^\bullet(k),\delta^\bullet))$ ayant les mêmes propriétés dans notre cas que le complexe "usuel" pour une valeur propre différente de 1 (puisqu'il n'a que deux faisceaux de cohomologie non nuls sur Y^*, et on a l'acyclicité sur S^* des faisceaux $\check{\mathcal{E}}^\bullet(k)$.)
On prendra garde qu'ici à nouveau les applications $\tilde{\theta}_k$ sont compatibles quand k augmente, alors que l'on a $\tilde{ob}_{k+1} = \tilde{ob}_k \circ \mathcal{N}_n$.
Nous définirons alors l'application $\theta : H^n(0) \to H^2_{\{0\}}(S,H^{n-1}(0))$ comme étant $\tilde{\theta}_k$ pour $k \gg 1$.

Remarque.
Toujours en supposant $n \geq 3$, le faisceau $\check{\mathcal{E}}^1(k) \simeq \mathcal{E}^1(k)\big/Ker\,\delta^1$ n'a pas de cohomologie en degré positif sur S^*. En effet on a les suites exactes

$$\begin{gathered} 0 \to Ker\,\delta^1 \to \mathcal{E}^1(k) \to \check{\mathcal{E}}^1(k) \to 0 \\ 0 \to Im\,\delta^0 \to Ker\,\delta^1 \to h^1(k) \to 0 \\ 0 \to h^0(k) \to \mathcal{E}^0(k) \to Im\,\delta^0 \to 0 \end{gathered}$$

qui donnent successivement les annulations pour tout $k \geq 1$

$$\begin{aligned} &H^i(S^*,Im\,\delta^0(k)) = 0, && \forall i \geq 1 \\ &H^j(S^*,Ker\,\delta^1(k)) = 0, && \forall j \geq 2 \\ &H^l(S^*,\check{\mathcal{E}}^1(k)) = 0, && \forall l \geq 1 \end{aligned}$$

On a donc la dégénérescence de la première suite spectrale donnant l'hypercohomologie sur S^* du complexe $(\check{\mathcal{E}}^\bullet(k),\delta^\bullet)$ et donc un isomorphisme

$$\mathbb{H}^n(S^*,(\check{\mathcal{E}}(k)^\bullet,\delta^\bullet)) \simeq H^n(\Gamma(S^*,\check{\mathcal{E}}(k)^\bullet),\delta^\bullet).$$

Nous pouvons étendre la définition des applications $\tilde{\theta}_k$ et $\tilde{ob}_k$ aux éléments $\delta-$fermés de $\Gamma(S^*,\mathcal{E}^n(k))$ pour $k \geq k_0$: ils induisent des classes dans $\mathbb{H}^n(S^*,(\check{\mathcal{E}}(k)^\bullet,\delta^\bullet))$; ce groupe est isomorphe à $\mathbb{H}^n(Y^*,(\check{\mathcal{E}}(k)^\bullet,\delta^\bullet))$ puisque les faisceaux de cohomologie non nuls du complexe $(\check{\mathcal{E}}(k)^\bullet,\delta^\bullet)$ sont à supports dans S. Pour éviter toute confusion, nous noterons ces applications par

$$\widehat{ob}_k : \Gamma(S^*,\mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\,\delta \to H^0(S^*,H^{n-1}(0))$$

et par

$$\widehat{\theta}_k : \Gamma(S^*, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\, \delta \to H^1(S^*, H^{n-1}(0)).$$

On notera que $\widehat{ob}_k$ est simplement donnée par la composée des morphismes de faisceaux sur S^*

$$(\tau_k)^{-1} : h^n(k) \to h^{n-1}(k) \hookrightarrow H^{n-1}(0).$$

Le cas $n = 2$.

La définition des applications $\tilde{ob}_k$ et θ ne pose pas de problème sérieux pour $n = 2$. Une manière de le voir directement (sans utiliser [B.91]) est de déduire de l'écriture locale

$$w|_{X_\sigma} = \tau_k(\alpha_\sigma) + \delta\beta_\sigma$$

correspondant à la surjection sur S^* $\tau_k : h^1(k) \to h^2(k)$, la relation :

$$j_{k,2k}(w)|_{X_\sigma} = \delta \begin{pmatrix} \beta_\sigma \\ \alpha_\sigma \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \beta_\sigma - \beta_{\sigma'} \\ \alpha_\sigma - \alpha_{\sigma'} \end{pmatrix}$$

induira un élément de $H^1(S^*, h^1(2k))$ dont l'image dans $H^1(S^*, H^1(0))$ (pour $k \gg 1$) sera $\theta([w])$. La cochaîne α_σ donne alors une section globale sur S^* du faisceau quotient $h^1(k)/\tau_k(h^0(k) \simeq H^1(0)$ pour $k \geq k_0$, ce qui définit $\tilde{ob}_k([w])$.

Donnons maintenant l'analogue de la proposition 11 de [B.91].

Théorème 3.2.2 *Sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1, considérons des entiers $k \geq k_0$ et $k' \geq k_0$. Soient $v \in \Gamma(S^*, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\, \delta$ et $w \in \Gamma(S^*, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\, \delta$. Notons par $e := \widehat{ob}_k(v) \in H^0(S^*, H^{n-1}(0))$ et par $\eta := \widehat{\theta}_k(w) \in H^1(S^*, H^{n-1}(0))$. Alors on a*

$$(2i\pi)^{n+1}.\tilde{h}(e, \eta) = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_{a+1}\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \bar{w}'_{k'} \wedge v_a \wedge \gamma\big)$$

où γ est une forme $\mathcal{C}^\infty$ de degré 1 au voisinage de S^* vérifiant , comme dans [B.91],

- *i) $Supp\, \gamma \cap S^*$ est compact ;*

- *ii)* $d\gamma = 0$ *au voisinage de* S^* *;*
- *iii)* γ *induit la classe du cycle fondamental de* S^* *dans* $H^1_c(S^*, \mathbb{C})$.

Si $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(X)$ *vaut identiquement 1 près de l'origine,* $\gamma = d\rho$ *convient.*

Corollaire 3.2.3 *Sous les hypothèses du théorème précédent, supposons que* v *et* w *soient restrictions à* S^* *d' éléments de* $\Gamma(S, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\, \delta$. *Alors on a* $\tilde{h}(e, \eta) = 0$.

Ce corollaire est analogue au corollaire 1 de la proposition 11 de [B.91].

Corollaire 3.2.4 *Soient* $k, k' \geq k_0$ *et soient* $w \in H^n((\Gamma(Y, \mathcal{E}^\bullet(k)), \delta))$ *et* $w' \in H^n((\Gamma(Y, \mathcal{E}^\bullet(k')), \delta))$. *Posons* $e := r^n(k)(w)$ *et* $e' := r^n(k')(w')$. *Alors on a*

$$(2i\pi)^{n+1}.\tilde{h}(\tilde{ob}_k(e), \theta(e')) = (-1)^k P_{k+2}\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge \bar{w'}_{k'}\big).$$

Ce corollaire est analogue au corollaire 2 de la proposition 11 de [B.91].

Corollaire 3.2.5 *Sous les hypothèses standards, l'image de* θ *est contenue dans l'orthogonal pour* $\tilde{h}$ *du sous-espace* $H^0(S, H^{n-1}(0))$ *de* $H^0(S^*, H^{n-1}(0))$.

Ce dernier corollaire est analogue à la première partie de la proposition 12 de [B.91]. Il se déduit immédiatemment du corollaire 3.2.3 (voir la preuve du corollaire 1 de la proposition 11 de [B.91] p.466).

Remarque.

Soient $k \geq k_0$, et $e \in Ker\mathcal{N}^k_n$ tel que $\tilde{ob}_k(e) \neq 0$. Pour conclure grâce au corollaire 3.2.4 que l'on aura alors un pôle d'ordre $k+2$ aux entiers négatifs dans le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ (voir le théorème 13 de [B.91] et notre théorème 0.0.4), il est essentiel d'avoir l'égalité entre l'image de θ dans $H^1(S^*, H^{n-1}(0))$ et l'orthogonal pour la forme hermitienne $\tilde{h}$ de $H^0(S, H^{n-1}(0))$. C'est à dire de savoir que l'inclusion donnée au corollaire 3.2.5 est en fait une égalité. Ce qui revient à montrer que $\tilde{h}$ établit une dualité hermitienne entre $H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$ et $Im\, \theta$. Ceci sera notre objectif dans ce qui suit. Ce résultat demandera encore beaucoup de travail puisqu'il ne sera atteint qu' à la fin du paragraphe 8.

Ce résultat sera également la clef de la non-dégénérescence de la forme hermitienne canonique "généralisée" que nous allons introduire plus loin.

4 L'espace vectoriel monodromique $H^n_{c\cap S}(0)$.

4.1

Introduisons sur X et Y les familles paracompactifiantes de supports suivants

- c/f la famille des fermés $f-$propres de X. Elle donne par restriction à Y la famille des compacts de Y que nous noterons simplement "c".
- $c \cap S$ la famille des fermés de X (ou de Y) qui rencontrent S suivant un compact.
- $mod\, S$ la famille des fermés de X (ou de Y) qui ne rencontrent pas S.

Nous utiliserons également ces familles de supports pour un ouvert de X ou de Y.
Comme les faisceaux $\mathcal{E}^\bullet(k)$ sont fins et la famille $c \cap S$ paracompactifiante, le $j-$ième groupe de cohomologie du complexe

$$\big(\Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^\bullet(k)), \delta^\bullet\big)$$

est isomorphe à l'hypercohomologie

$$\mathbb{H}^j_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^\bullet(k)), \delta^\bullet).$$

Comme τ_k est un morphisme de complexe de degré $+1$ il induit une flèche

$$\tau_k : \mathbb{H}^{j-1}_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^\bullet(k)), \delta^\bullet) \to \mathbb{H}^j_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^\bullet(k)), \delta^\bullet).$$

Mais l'égalité[13]

$$j_{k,k+k'} \circ \tau_k = \tau_{k+k'} \circ \big({}_{k+k'}\mathcal{N}^{k'}\big) \circ j_{k,k+k'}, \tag{@}$$

entre morphismes de faisceaux $h^\bullet(k) \to h^\bullet(k+k')$ permet de voir qu'il est inutile de passer au quotient par $\tau_k\big(\mathbb{H}^{j-1}_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^\bullet(k)), \delta^\bullet)\big)$ et l'on considerera donc simplement le système inductif

$$\big(\mathbb{H}^j_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^\bullet(k)), \delta^\bullet), j_{k,k+k'}\big)$$

De plus les endomorphismes de complexes ${}_k\mathcal{N}$ déduit des endomorphismes ${}_kN \in End(\mathbb{C}^k)$ sont compatibles avec les $j_{k,k+k'}$.

[13] En fait le lemme 2 p.442 de [B.91] donne une homotopie $t_k : \mathcal{E}^\bullet(k) \to \mathcal{E}^\bullet(k)$ vérifiant $\tau_k \circ_k \mathcal{N} -_k \mathcal{N} \circ \tau_k = \delta \circ t_k - t_k \circ \delta$ qui, combinée avec l'égalité évidente (dans $Hom(\mathcal{E}^\bullet(k), \mathcal{E}^\bullet(k+k'))$) : $j_{k,k+k'} \circ \tau_k = ({}_{k+k'}\mathcal{N}^{k'}) \circ \tau_{k+k'} \circ j_{k,k+k'}$ permet de raisonner directement et redonne (@).

Définition 4.1.1 *Paçons-nous sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1. Nous définirons l'espace vectoriel* $H^j_{c\cap S}(0)$ *comme la limite inductive quand* $k \to \infty$ *du système inductif ci-dessus. L'action de* ${}_k\mathcal{N}$ *sur ce système inductif permet de définir une action monodromique (unipotente) sur sa limite inductive qui sera donnée par* $T_{c\cap S} = exp(-2i\pi.\mathcal{N}_{c\cap S})$.

Les limites inductives

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ k\to\infty}} \mathbb{H}^n_c(Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ k\to\infty}} \mathbb{H}^n(Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet))$$

sont respectivement isomorphes à $H^n_c(0)$ et $H^n(0)$ (voir (1.5) et (1.6)) ce qui nous fournit des applications $\mathbb{C}-$linéaires monodromiques "naturelles"

$$can^{c\cap S}_c : H^n_c(0) \to H^n_{c\cap S}(0) \quad \text{et} \quad can_{c\cap S} : H^n_{c\cap S} \to H^n(0)$$

dont la composée est l'application usuelle d'oubli de support

$$can : H^n_c(0) \to H^n(0).$$

On remarquera que si la singularité de f est isolée pour la valeur propre 1 (et donc $S = \{0\}$), alors $H^n_{c\cap S}(0)$ est isomorphe à $H^n(0)$ via $can_{c\cap S}$.

Notre premier théorème 0.0.1 va montrer que pour $n \geq 3$ le noyau $Ker\,\theta$ est simplement l'image de l'application $H^n_{c\cap S}(0) \xrightarrow{can_{c\cap S}} H^n(0)$ que nous avons introduite plus haut.
La preuve du cas $n = 2$ sera traitée séparément au (4.5).

Théorème 4.1.2 (Théorème 0.0.1) *Sous les hypothèses standards, on a, pour* $n \geq 3$, *la suite exacte :*

$$0 \to H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0)) \xrightarrow{i} H^n_{c\cap S}(0) \xrightarrow{can_{c\cap S}} H^n(0) \xrightarrow{\theta} H^1(S^*, H^{n-1}(0)).$$

Preuve. Nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme 4.1.3 *Supposons* $n \geq 2$ *et les hypothèses standards vérifiées pour la valeur propre 1 de la monodromie de* f. *Alors on a*

$$H^j(S^*, \delta\mathcal{E}^i(k)) = 0, \qquad \forall i \in [0, n-2], \forall j \geq 1 \tag{3}$$

$$H^j(S, \delta\mathcal{E}^i(k)) \simeq H^j(Y, \delta\mathcal{E}^i(k)) = 0, \qquad \forall i \geq 0, \forall j \geq 1 \tag{4}$$

Preuve. Nous utiliserons les annulations suivantes pour les faisceaux de cohomologie $h^j(k)$ du complexe $(\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet)$ qui sont non nuls seulement pour $j = 0, 1, n-1, n, n+1$ et qui sont décrits au (1.3) :

$$H^q(S^*, h^j(k)) = 0, \qquad \forall j \geq 0, \forall q \geq 2 \tag{5}$$

$$H^p(S, h^j(k)) \simeq H^p(Y, h^j(k)) = 0, \qquad \forall j \geq 0, \forall p \geq 1. \tag{6}$$

Pour $i = 0$ considérons la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to h^0(k) \to \mathcal{E}^0(k) \to \delta\mathcal{E}^0(k) \to 0. \tag{$A_0(k)$}$$

Comme $\mathcal{E}^0(k)$ est un faisceau fin, on obtient (3) et (4) pour $i = 0$.
Pour $i = 1$ on considère la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \delta\mathcal{E}^0(k) \to Ker\,\delta^1(k) \to h^1(k) \to 0. \tag{$B_1(k)$}$$

Elle donne $H^q(S^*, Ker\,\delta^1(k)) = 0, \forall q \geq 2$ ainsi que l'annulation de $H^p(S, Ker\,\delta^1(k))$ et de $H^p(Y, Ker\,\delta^1(k))$, $\forall p \geq 1$, grace à (3) et (4) pour $i = 0$.
La suite exacte de faisceaux :

$$0 \to Ker\,\delta^1(k) \to \mathcal{E}^1(k) \to \delta\mathcal{E}^1(k) \to 0 \tag{$A_1(k)$}$$

donne alors les annulations (3) et (4) pour $i = 1$ puisque $\mathcal{E}^1(k)$ est fin.
Supposons que l'on a montré les annulations (3) et (4) pour $i \in [1, n-3]$; nous allons en déduire ces mêmes annulations pour $i+1$, ce qui prouvera par récurrence les annulations (3) et (4) pour $i \in [0, n-2]$.
Considèrons la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \delta\mathcal{E}^i(k) \to \mathcal{E}^{i+1}(k) \to \delta\mathcal{E}^{i+1}(k) \to 0.$$

Elle permet de conclure aux annulations (3) et (4) pour $i+1$ grace à la finesse du faisceau $\mathcal{E}^{i+1}(k)$.
Pour prouver les annulations (4) pour $i \geq n-1$ on utilise successivement les suites exactes :

$$0 \to \delta\mathcal{E}^{q-1}(k) \to Ker\,\delta^q(k) \to h^q(k) \to 0 \tag{$B_q(k)$}$$

$$0 \to Ker\,\delta^q(k) \to \mathcal{E}^q(k) \to \delta\mathcal{E}^q(k) \to 0 \tag{$A_q(k)$}$$

pour $q \geq n-1$. ■

Lemme 4.1.4 *Sous les hypothèses standarts avec* $n \geq 4$ *et* $k \gg 1$ *la flèche naturelle*

$$e_k := \frac{H^0(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k))}{H^0(S, Ker\,\delta^{n-1}(k)) + \delta H^0(S^*, \mathcal{E}^{n-2}(k))} \to H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels monodromiques.
Pour $n = 3$ *la flèche analogue est surjective et de noyau isomorphe à* $H^1(S^*, h^1(k))$. *Donc on obtient encore un isomorphisme monodromique, quitte à passer à la limite inductive sur* k[14].
Pour $n = 2$ *la flèche analogue, après passage à la limite inductive, est encore surjective et a un noyau isomorphe à* $H^1(S^*, \mathbb{C})$.

Preuve. Comme on a supposé $n \geq 3$ l'application

$$r^{n-1}(k) : h^{n-1}(k) \to H^{n-1}(0)$$

est un isomorphisme pour $k \gg 1$ d'après (1.3). La suite exacte

$$0 \to \delta\mathcal{E}^{n-2}(k) \to Ker\,\delta^{n-1}(k) \to h^{n-1}(k) \to 0 \qquad (B_{n-1}(k))$$

donne, puisque $H^1(S^*, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k)) = 0$ d'après le lemme 4.1.3 la surjectivité de la flèche $q : H^0(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k)) \to H^0(S^*, h^{n-1}(k))$, d'où une flèche naturelle et surjective

$$H^0(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k)) \to H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$$

puisque l'on a

$$H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0)) \simeq \frac{H^0(S^*, H^{n-1}(0))}{H^0(S, H^{n-1}(0))}$$

grâce à l'annulation de $H^1(S, H^{n-1}(0))$[15].
Il nous reste donc à identifier le noyau de cette surjection pour conclure la preuve. Comme les espaces $H^0(S, Ker\,\delta^{n-1}(k))$ et $\delta H^0(S^*, \mathcal{E}^{n-2}(k))$ ont des images qui sont clairement dans le noyau, il suffit de montrer que tout élément $\alpha \in H^0(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k))$ dont l'image dans $H^0(S^*, h^{n-1}(k))$ se prolonge à $H^0(S, H^{n-1}(0))$ est de cette forme. Comme l'application

$$H^0(S, Ker\,\delta^{n-1}(k)) \to H^0(S, h^{n-1}(k))$$

est surjective, grâce à l'annulation de $H^1(S, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k))$ qui est prouvée au lemme 4.1.3, il existe $\beta \in H^0(S, Ker\,\delta^{n-1}(k))$ dont l'image dans $H^0(S, h^{n-1}(k))$ prolonge à S l'image de α dans $H^0(S^*, h^{n-1}(k))$. Donc la restriction de β à S^* est égale à α modulo le noyau $H^0(S^*, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k))$. On conclut pour $n \geq 4$ en remarquant que l'égalité $Ker\,\delta^{n-2}(k) = \delta\mathcal{E}^{n-3}(k)$ (qui est vraie

[14]En fait, de façon plus précise, l'application $j_{k,k+1}$ induit 0 sur $h^1(k)$.
[15]Rappelons que $H^{n-1}(0)$ est un système local sur S^*.

pour $n \geq 4$) donne, grace à l'annulation de $H^1(S^*, \delta\mathcal{E}^{n-3}(k))$ montrée au lemme 4.1.3, la surjectivité de l'application naturelle

$$\delta : H^0(S^*, \mathcal{E}^{n-2}(k)) \to H^0(S^*, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k))$$

d'où notre assertion.
Pour $n = 3$ la suite exacte de cohomologie de la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to Ker\,\delta^1(k) \to \mathcal{E}^1(k)) \to \delta\mathcal{E}^1(k)) \to 0 \qquad (A_1(k))$$

montre que le conoyau de la flèche

$$\delta : H^0(S^*, \mathcal{E}^1(k)) \to H^0(S^*, \delta\mathcal{E}^1(k))$$

est égal à $H^1(S^*, Ker\,\delta^1(k))$ qui est isomorphe à $H^1(S^*, h^1(k))$ comme on le constate en utilisant la suite exacte longue de cohomologie de la suite exacte :

$$0 \to \delta\mathcal{E}^0(k) \to Ker\,\delta^1(k)) \to h^1(k) \to 0 \qquad (B_1(k))$$

et le lemme 4.1.3. D'où notre assertion pour $n = 3$, puisque $\lim\limits_{k\to\infty} h^1(k) = 0$ dans ce cas.
Pour $n = 2$ on a $\underset{k\to\infty}{lim}\ h^1(k) \simeq H^1(0)$ et la suite exacte

$$0 \to \delta\mathcal{E}^0(k) \to Ker\,\delta^1(k) \to h^1(k) \to 0$$

donne la surjectivité de $H^0(S^*, Ker\,\delta^1(k)) \to H^0(S^*, h^1(k))$ puisque

$$H^1(S^*, \delta\mathcal{E}^0(k)) \simeq H^2(S^*, h^0(k)) \simeq 0.$$

Donc la flèche $\underset{k\to\infty}{lim}\ (e_k)$ est surjective.
Son noyau va être égal à la limite inductive du quotient

$$\frac{H^0(S^*, \delta\mathcal{E}^0(k))}{\big(H^0(S, Ker\,\delta^1(k)) + \delta H^0(S^*, \mathcal{E}^0(k))\big) \cap H^0(S^*, \delta\mathcal{E}^0(k))}.$$

Mais on a $H^0(S, Ker\,\delta^1(k)) \cap H^0(S^*, \delta\mathcal{E}^0(k)) \simeq H^0_{\{0\}}(S, h^1(k))$ qui a une limite inductive nulle[16]; la limite inductive du dénominateur coïncide donc avec celle de $\delta H^0(S^*, \mathcal{E}^0(k))$. La suite exacte

$$0 \to h^0(k) \to \mathcal{E}^0(k)) \to \delta\mathcal{E}^0(k)) \to 0$$

montre alors que le noyau est isomorphe à

$$\lim_{k\to\infty} \frac{H^0(S^*, \delta\mathcal{E}^0(k))}{\delta H^0(S^*, \mathcal{E}^0(k))} \simeq \lim_{k\to\infty} H^1(S^*, h^0(k)) \simeq H^1(S^*, \mathbb{C}).$$

D'où notre assertion pour $n = 2$. ■

[16] Car $H^1(0)$ n'a pas de section non nulle à support l'origine.

4.2 Construction de l'application i.

Comme nous supposons $n \geq 3$ il nous suffit, d'après le lemme 4.1.4, de construire une application linéaire monodromique

$$H^0(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k)) \to H^n_{c\cap S}(0)$$

et de vérifier que son noyau coïncide avec $\delta H^0(S^*, \mathcal{E}^{n-2}(k)) + H^0(S, Ker\,\delta^{n-1}(k))$[17] et que son image coïncide avec $Ker\,can_{c\cap S}$.
Soit donc $\alpha \in H^0(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k))$ et fixons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ qui vérifie $\chi \equiv 1$ près de $S \setminus B(0,r)$ et qui est nulle dès que l'on s'éloigne de $S \setminus B(0,r)$ de sorte que $Supp\,(d\chi) \cap S^*$ soit compact. Posons alors $i(\alpha) := d\chi \wedge \alpha = \delta(\chi.\alpha)$. Il est immédiat de vérifier que la classe ainsi définie dans $H^n_{c\cap S}(0)$ ne dépend ni de $r \in]0, \varepsilon[$[18] ni du choix de χ. De plus, si on a $\alpha = \delta\beta$, avec $\beta \in H^0(S^*, \mathcal{E}^{n-2}(k))$, on aura

$$\delta(\chi.\alpha) = \delta(-d\chi \wedge \beta)$$

et $d\chi \wedge \beta$ est à support dans $c \cap S$.
Si α est la restriction à S^* de $\tilde{\alpha} \in H^0(S, Ker\,\delta^{n-1}(k))$ on aura $\delta(\chi.\alpha) = \delta((1-\chi).\tilde{\alpha})$ et $(1-\chi).\tilde{\alpha}$ est à support dans $c \cap S$. Ceci montre que l'application i est bien définie pour $n \geq 3$. Elle est monodromique car on a

$$d\chi \wedge \mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{N}(d\chi \wedge \alpha).$$

Pour montrer l'injectivité de i, considérons $\alpha \in H^0(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k))$ tel que $i(\alpha) = \delta(\chi.\alpha) = \delta\beta$ avec $\beta \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$[19]. Alors $\chi.\alpha - \beta$ est dans $\Gamma(Y, Ker\,\delta^{n-1}(k))$ et on obtient ainsi un prolongement de α à $H^0(S, Ker\,\delta^{n-1}(k))$.
Pour identifier l'image de i commençons par remarquer que $can_{c\cap S} \circ i = 0$. En effet, par définition, $i(\alpha) = \delta(\chi.\alpha)$ et $\chi.\alpha \in \Gamma(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$. D'où l'inclusion de l'image de i dans $Ker\,can_{c\cap S}$. Réciproquement, soit u dans $\Gamma(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$ telle que le support de δu soit dans $c \cap S$. On a donc un compact K de S tel qu'au voisinage de $S \setminus K$ on ait $\delta u = 0$. Alors u définit un élément de

$$H^0(S \setminus K, h^{n-1}(k)) \simeq H^0(S^*, H^{n-1}(0))$$

pour $k \gg 1$. L'image par i de cette classe est représentée par $\delta(\chi.u)$. Mais $\delta u - \delta(\chi.u) = \delta((1-\chi).u)$ et on a $(1-\chi).u \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$, ce qui montre que la classe initiale δu est bien dans l'image de i.

[17] quitte à passer à la limite inductive sur k pour $n = 3$.
[18] Où ici ε est le rayon de la boule de Milnor X que l'on considère.
[19] Quitte à choisir $k \gg 1$.

4.3 Le noyau de l'application θ.

Rappelons maintenant comment calculer de l'application θ. D'après [B.91] p.428 on a la suite exacte de faisceaux suivante, pour $k \gg 1$

$$h^{n-2}(k) \xrightarrow{\tau_k} h^{n-1}(k) \xrightarrow{\tau_k} h^n(k) \to H^n(0) \to 0$$

Soit $w \in \Gamma(Y, Ker\, \delta^n(k))$. On peut donc écrire, localement le long de S^*, puisque le faisceau $H^n(0)$ est concentré à l'origine,

$$w|_{X_\sigma} = \tau_k(\alpha_\sigma) + \delta\beta_\sigma$$

avec $\delta\alpha_\sigma = 0$ (comparer avec [B.91] p.439). On obtient, comme dans loc. cit. que les α_σ se recollent[20] pour donner une section sur S^* du faisceau $h^{n-1}(k)$ dont l'image dans $H^1_{\{0\}}(S, h^{n-1}(k))$ est indépendante des choix effectués. En utilisant ce qui précède, on peut trouver $\alpha \in \Gamma(S^*, Ker\, \delta^{n-1}(k))$ telle que $w - \tau_k(\alpha)$ soit localement $\delta-$exacte le long de S^*. A partir des écritures locales

$$w - \tau_k(\alpha)|_{X_\sigma} = \delta\beta_\sigma$$

on définit $\theta(w)$ par la classe dans

$$H^1(S^*, h^{n-1}(k)) \simeq H^1(S^*, H^{n-1}(0))$$

pour $k \gg 1$, du 1-cocycle $\beta_\sigma - \beta_{\sigma'}$. On vérifie facilement que ceci est indépendant des choix effectués.

Nous voulons montrer maintenant que le noyau de θ est l'image de $can_{c\cap S}$. D'abord si w a son support dans $c \cap S$ on peut choisir pour chaque $\sigma \in S \setminus K, \alpha_\sigma = 0$ ainsi que $\beta_\sigma = 0$. La section α sera donc nulle sur $S \setminus K$ et comme $H^{n-1}(0)$ est un système local sur S^*, on aura $\alpha = 0$ et donc $\theta[w]$ sera nul dans $H^1(S \setminus K, H^{n-1}(0))$. A nouveau le fait que $H^{n-1}(0)$ soit un système local sur S^* donne la nullité de $\theta[w]$.

Réciproquement, supposons que $\theta[w] = 0$. Utilisons maintenant un k assez grand pour assurer que $\tilde{ob}_k \equiv 0$[21]. Cela signifie que l'on peut écrire globalement sur S^*

$$w = \delta\beta$$

avec $\beta \in \Gamma(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k))$. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ vérifiant $\chi \equiv 1$ près de $S \setminus B(0,r)$ et s'annulant identiquement dès que l'on s'éloigne de $S \setminus B(0,r)$. Alors $w - \delta(\chi.\beta)$ est un représentant de la classe de w qui est à support dans $c \cap S$. Donc cette classe est bien dans l'image de $can_{c\cap S}$.

Ceci achève la preuve du théorème 1 pour $n \geq 3$. ■

[20] Pour $n \geq 4$; pour $n = 3$ le recollement a lieu seulement dans $H^2(0)$.

[21] Comme on l'a déja fait remarquer plus haut la formule $\tilde{ob}_{k+k'} = \tilde{ob}_k \circ \mathcal{N}^{k'}$ de [B.91] est encore valable ici ; donc pour k assez grand on a $\tilde{ob}_k \equiv 0$.

4.4 Le cas $n = 2$.

Définissons sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1 et pour $n = 2$

$$\mathcal{K} := \lim_{k \to \infty} \frac{H^0(S^*, Ker\,\delta^1(k))}{H^0(S, Ker\,\delta^1(k)) + \delta H^0(S^*, \mathcal{E}^0(k))}.$$

Il résulte du lemme 4.1.4 que l'on a une suite exacte monodromique :

$$0 \to H^1(S^*, \mathbb{C}) \xrightarrow{j} \mathcal{K} \xrightarrow{e} H^1_{\{0\}}(S, H^1(0)) \to 0$$

obtenue par passage à la limite inductive sur k.
On remarquera que le sous-espace $H^1(S^*, \mathbb{C})$ est dans la partie invariante par la monodromie de $\mathcal{K}$. Ceci résulte du fait que la monodromie agit comme l'identité sur les faisceaux $h^0(k)$.

Théorème 4.4.1 (Théorème 0.0.1, cas $n = 2$.) *Sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1, on a pour $n = 2$ la suite exacte monodromique:*

$$0 \to \mathcal{K} \xrightarrow{i} H^2_{c \cap S}(0) \xrightarrow{can_{c \cap S}} H^2(0) \xrightarrow{\theta} H^1(S^*, H^1(0))$$

où l'application i est déduite du lemme 4.1.4.

La preuve est tout à fait analogue à celle donnée dans le cas $n \geq 3$ modulo les adaptations que l'on vient de faire pour tenir compte du résultat différent du lemme 4.1.4 dans ce cas, et modulo les modifications suivantes :

- Pour montrer que $Ker\,can_{c \cap S} \subset Im(i)$ on considère $u \in \Gamma(Y, \mathcal{E}^1(k))$ qui est telle que le support de δu soit dans $c \cap S$. On a donc un compact K de S tel qu'au voisinage de $S \setminus K$ on ait $\delta u = 0$. Alors u définit un élément de $H^0(S \setminus K, Ker\,\delta^1(k))$. Comme on a

  $$H^0(S \setminus K, H^1(0)) \simeq H^0(S^*, H^1(0))$$

  son image dans $H^0(S \setminus K, H^1(0))$ donne une section de $H^0(S^*, H^1(0))$ ce qui nous fournit une section $v \in H^0(S^*, h^1(k))$ qui prolonge l'image de u dans $H^0(S \setminus K, h^1(k))$ pour $k \gg 1$. Comme on a $H^1(S^*, \delta\mathcal{E}^0(k)) = 0$ d'après le lemme 4.1.4, on en déduit l'existence de $u_1 \in H^0(S^*, Ker\,\delta^1(k))$ dont la restriction à $S \setminus K$ est égale à u. Comme on a $H^0(S \setminus K, h^0(k)) \simeq H^0(S^*, h^0(k))$ on peut modifier u_1 pour que sa restriction à $S \setminus K$ soit exactement égale à u. On conclut alors comme dans le cas $n \geq 3$.

- Pour l'étude du noyau de θ, on doit remplacer la suite exacte considérée pour $n \geq 3$ par la suite exacte :

$$0 \to \frac{h^1(k)}{\tau_k h^0(k)} \to h^2(k) \to H^2(0) \to 0.$$

et utiliser l'isomorphisme sur S^* : $\frac{h^1(k)}{\tau_k h^0(k)} \simeq H^1(0)$.
Localement près de $\sigma \in S^*$ on a encore une écriture

$$w|_{X_\sigma} - \tau_k(\alpha_\sigma) = \delta\beta_\sigma$$

avec $\delta(\alpha_\sigma) = 0$. Mais maintenant le recollement des α_σ n'a lieu sur S^* que dans le quotient $\frac{h^1(k)}{\tau_k h^0(k)}$. On ne peut donc, en général, trouver un élement $\alpha \in \Gamma(S^*, Ker\,\delta^1(k))$ tel que $w - \tau_k(\alpha)$ soit localement $\delta-$exact le long de S^*. Mais ceci ne change rien à la preuve de l'inclusion $Im(can_{c\cap S}) \subset Ker\,\theta$.

- Pour voir que $Ker\,\theta \subset Im(can_{c\cap S})$ l'argument permettant d'écrire $w = \delta\beta$ globalement près de S^* avec $\beta \in \Gamma(S^*, \mathcal{E}^1(k))$ n'est plus correct. L'annulation de $\tilde{ob}_k$ pour $k \gg 1$ reste valable, mais donne seulement l'existence, pour $k \gg 1$, de $\gamma_\sigma \in \Gamma(X_\sigma, Ker\,\delta^0(k))$, vérifiant $\alpha_\sigma = \tau_k(\gamma_\sigma)$ dans $\Gamma(X_\sigma, Ker\,\delta^1(k))$ quitte à modifier le choix des β_σ. Mais quitte à changer k en $k+1$ en appliquant $j_{k,k+1}$, on rend $\tau_k(\gamma_\sigma)$ $\delta-$exact, et donc $j_{k,k+1}(w)$ devient localement $\delta-$exacte le long de S^*. Alors l'argument du cas $n \geq 3$ s'applique et permet de conclure à l'égalité $Ker\,\theta = Im(can_{c\cap S})$.

Une conséquence importante mais immédiate du théorème 4.1.2 et du corollaire 3.2.5 du théorème 3.2.2, est l'égalité de la codimension de $Im(\theta)$ dans l'orthogonal pour $\tilde{h}$ de $H^0(S, H^{n-1}(0))$ avec $\dim H^n_{c\cap S}(0) - \dim H^n(0)$. Ceci montre déja que la dimension de l'espace vectoriel $H^n_{c\cap S}(0)$ est au moins égale à celle de $H^n(0)$. Notre objectif va être maintenant de montrer que l'on a en fait égalité de ces deux dimensions. Ceci n'est pas évident et sera obtenu via la construction d'une application de variation injective (pour $n \geq 3$ au moins) commutant aux monodromies :

$$var : H^n_{c\cap S}(0) \to H^n_c(0).$$

On en déduira alors que $\dim H^n_{c\cap S}(0) \leq \dim H^n_c(0) = \dim H^n(0)$ pour $n \geq 3$ cette dernière égalité résultant de la dualité de Poincaré sur la fibre de Milnor de f à l'origine. On en conclura, toujours pour $n \geq 3$, que, de plus, cette application de variation est bijective, ce qui sera la clef de la non-dégénérescence de la forme hermitienne canonique "généralisée" :

$$\mathcal{H} : H^n_{c\cap S}(0) \times H^n(0) \to \mathbb{C}$$

qui sera définie plus loin.
Ceci montrera également que $Im(\theta)$ coïncide avec l'orthogonal dans $H^1(S^*, H^{n-1}(0))$ pour $\tilde{h}$ de $H^0(S, H^{n-1}(0))$.
En fait, dans le cas $n = 2$ il suffit de remplacer systématiquement l'espace $H^2_{c\cap S}(0)$ par son quotient par $H^1(S^*, \mathbb{C})$ et donc $\mathcal{K}$ par son quotient par $H^1(S^*, \mathbb{C})$ pour avoir les mêmes résultats que pour $n \geq 3$.
En effet, pour $n = 2$ le théorème 4.4.1 permet de prouver une inégalité de dimension analogue à celle du cas $n \geq 3$:
La suite exacte du théoreme donne

$$\dim\, H^2_{c\cap S}(0) + \dim\, Im(\theta) = \dim\, \mathcal{K} + \dim\, H^2(0)$$

et la suite exacte qui définit $\mathcal{K}$ (voir le début du 4.4) donne

$$\dim\, H^1(S^*, \mathbb{C}) + \dim\, H^1_{\{0\}}(S, H^1(0)) = \dim\, \mathcal{K}.$$

L'inclusion de $Im(\theta)$ dans l'orthogonal pour $\tilde{h}$ de $H^0(S, H^1(0))$ donne, puisque $H^0(S^*, H^1(0))$ est le dual de $H^1(S^*, H^1(0))$, l'inégalité

$$\dim\, Im(\theta) + \dim\, H^0(S, H^1(0)) \leq \dim\, H^1(S^*, H^1(0)).$$

D'où notre assertion, puisque

$$H^1_{\{0\}}(S, H^1(0)) \simeq \frac{H^0(S^*, H^1(0))}{H^0(S, H^1(0))}.$$

5 La suite exacte longue de J. Leray généralisée.

5.1

Le premier ingrédient dans la construction de notre variation sera une généralisation encore un peu plus sophistiquée que celle de [B.97] du résidu de J. Leray.

Théorème 5.1.1 *Soit Z une variété complexe connexe de dimension $n+1$ et soit Y une hypersurface fermée d'intérieur vide dans Z. Soit S un sous-ensemble analytique fermé et d'intérieur vide de Y tel qu'en chaque*

point y de $Y \setminus S$, l'hypersurface Y admette une équation locale réduite f_y dont la monodromie n'admet pas la valeur propre 1 (dans son action sur la cohomologie réduite de la fibre de Milnor de f_y en y).
Notons par $mod\, S$ la famille (paracompactifiante) des fermés de Z qui ne rencontrent pas S. Alors on a la suite exacte longue " de Leray" à supports $mod\, S$:

$$\cdots \to H^q_{mod\, S}(Z, \mathbb{C}) \overset{i^q}{\to} H^q_{mod\, S}(Z \backslash Y, \mathbb{C}) \overset{Res^q}{\to} H^{q-1}_{mod\, S}(Y, \mathbb{C}) \overset{\partial^q}{\to} H^{q+1}_{mod\, S}(Z, \mathbb{C}) \to \cdots$$

Si on dispose d'une équation glabale réduite $f \in \mathcal{O}(Z)$ de Y dans Z, pour toute classe $[w] \in H^q_{mod\, S}(Z \setminus Y, \mathbb{C})$ représentée par une forme semi-méromorphe d-fermée w, à pôles dans Y et à support dans $mod\, S$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de Y dans Z et des formes $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W})^{q-1}$ et $\omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W})^q$ d-fermées sur $\mathcal{W}$ à supports dans $mod\, S|_{\mathcal{W}}$ et une forme semi-méromorphe α de degré $q-1$ à pôles dans Y et à support dans $mod\, S|_{\mathcal{W}}$ vérifiant :

$$w = \frac{df}{f} \wedge \eta + \omega + d\alpha \quad \text{sur} \quad \mathcal{W} \setminus Y \tag{@}$$

La classe $[\eta|_Y] \in H^{q-1}_{mod\, S}(Y, \mathbb{C})$ est alors l'image par Res^q de la classe

$$[w] \in H^q_{mod\, S}(Z \setminus Y, \mathbb{C}).$$

Remarque.
Le seul point non trivial dans la suite exacte ci-dessus est bien sur l'identification du groupe de cohomologie à support $H^{q+1}_{Y, mod\, S}(Z, \mathbb{C})$ avec le groupe $H^{q-1}_{mod\, S}(Y, \mathbb{C})$ qui est analogue à ce qui se passe dans le cas d'une hypersurface lisse. La présence de la famille de supports $mod\, S$ est relativement anodine puisqu'elle est paracompactifiante et que sa restriction à Y est constituée des fermés de Y qui sont dans $mod\, S$. On notera cependant que cet énoncé peut s'appliquer en présence d'un lieu singulier pour l'hypersurface Y qui est bien plus gros que S.

Démonstration. La preuve repose sur deux faits :

- 1) Le quasi-isomorphisme, dû à A. Grothendieck (voir [Gr. 65]) :

  $$Rj_*j^*\underline{\mathbb{C}}_Z \simeq (\mathcal{C}^\infty_Z[*Y]^\bullet, d^\bullet)$$

  qui montre que le complexe des formes semi-méromorphes à pôles dans Y donne une incarnation "fine" du complexe $Rj_*j^*\underline{\mathbb{C}}_Z$.

- 2) La dégénérescence de la suite spectrale :

$$E_2^{p,q} := H^q_{mod\,S}(Z, \underline{H}^p_Y(\mathbb{C}))$$

qui résulte du fait que, sur $Z \setminus S$, on a $\underline{H}^p_Y(\mathbb{C}) = 0$ pour $p \neq 2$ et $\underline{H}^2_Y(\mathbb{C}) \simeq \underline{\mathbb{C}}_Y.\frac{df}{f}$, combiné avec le fait que si le faisceau $\mathcal{F}$ est nul sur $Z \setminus S$ alors on a $H^p_{mod\,S}(Z, \mathcal{F}) = 0, \forall p \geq 0$.

Le calcul de $\underline{H}^p_Y(\mathbb{C})$ sur $Z \setminus S$ vient de l'absence de la valeur propre 1 pour la monodromie locale (voir la remarque finale de [B.97]) d'une équation locale réduite f de Y, qui donne l'annulation des groupes $H^i(D^*, R^j f_*(\mathbb{C}_Z))$ pour tout $i \geq 0$ quand $j \neq 0$.
La suite exacte longue de Leray en résulte alors, d'après [Go.58] th.4.10.1, puisque la dégénérescence de la suite spectrale donne les isomorphismes

$$H^{q+1}_{Y, mod\,S}(Z, \mathbb{C}) \simeq H^{q-1}_{mod\,S}(Y, \mathbb{C}).$$

Pour prouver (@) représentons $Res^q[w] \in H^{q-1}_{mod\,S}(Y, \mathbb{C})$ par une forme $\eta \in \mathcal{C}^\infty$ de degré $q-1$ d-fermée à support dans $mod\,S$[22] sur un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de Y assez petit. Alors la classe $[w - \frac{df}{f} \wedge \eta] \in H^q_{mod\,S}(\mathcal{W} \setminus Y, \mathbb{C})$ aura un résidu nul d'après la suite exacte de Leray sur $\mathcal{W}$. On en déduit l'existence de $\omega \in \mathcal{C}^\infty_{mod\,S}(\mathcal{W})^q$ vérifiant $d\omega = 0$ et dont la restriction à $Z \setminus Y$ induit la classe $[w - \frac{df}{f} \wedge \eta] \in H^q_{mod\,S}(\mathcal{W} \setminus Y, \mathbb{C})$. On en alors déduit l'existence de α donnant (@). ■

6 Construction de $\widetilde{var} : H^n_{c \cap S}(0) \to H^n_c(0)$.

6.1

Considérons donc, pour $k \geq 1$ donné, $w \in \Gamma_{c \cap S}(Y, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\,\delta$. Notons par X' la trace sur X d'une boule centrée à l'origine et de rayon $\varepsilon' < \varepsilon$ mais assez proche de ε pour avoir $Supp(w) \cap S \subset Y'$ où $Y' := Y \cap X'$. Notons alors par Z un voisinage ouvert de $Y \setminus \bar{Y}'$. Sur Z, le morphisme de complexe

$$(\mathcal{F}^\bullet_{mod\,S}(k), \delta^\bullet) \to (\mathcal{E}^\bullet_{mod\,S}(k), \delta^\bullet)$$

est un quasi isomorphisme. On a noté ici par $\mathcal{G}_{mod\,S}$ le sous faisceau du faisceau $\mathcal{G}$ des sections qui sont nulles au voisinage de S. On a donc, par définition la suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{G}_{mod\,S} \to \mathcal{G} \to j_! j^*(\mathcal{G}) \to 0$$

[22]Ceci est possible grace à [Go.58] th.4.11.1 et à de Rham.

où $j : X \setminus S \hookrightarrow X$ désigne l'inclusion.
Comme la monodromie agit comme l'identité[23] sur les faisceaux de cohomologies du complexe $(\mathcal{F}^\bullet_{mod\,S}(k), \delta^\bullet)$ on peut trouver $u \in \Gamma_{mod\,S}(Z, \mathcal{E}^{n-1}(k))$ vérifiant

$$ {}_k\mathcal{N}(w) = \delta u \quad \text{sur} \quad Z. $$

Soit $\rho \in \mathcal{C}^\infty_{c/f}(X)$ valant identiquement 1 au voisinage de $\bar{X}'$. Alors posons $\xi := (1-\rho).u$ et $v :=_k \mathcal{N}(w) - \delta\xi$. On a alors $v \in \Gamma_{c/f}(Y, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\,\delta$. Cela donne explicitement

$$ w_{j-1} = v_j + d\xi_j - \frac{df}{f} \wedge \xi_{j-1} \qquad \forall j \in [1, k] $$

avec la convention $w_0 = 0 = \xi_0$. On aura en particulier, puisque $\delta w = 0$

$$ d(w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k) = \frac{df}{f} \wedge v_k. $$

Choisissons maintenant une boule centrée à l'origine de rayon $\varepsilon'' \in]\varepsilon', \varepsilon[$ et assez proche de ε pour que la trace X'' de cette boule sur X contienne $Supp\,(v)$. Posons alors $\tilde{Y} := Y \setminus \bar{Y}''$. Alors la forme semi-méromorphe $w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k$ de degré n est $d-$fermée sur un voisinage ouvert assez petit $\tilde{Z}$ de $\tilde{Y}$ et a un support qui ne rencontre pas $S \cap \tilde{Y}$. On peut donc lui appliquer le théorème 5.1.1 et l'écrire sur $\tilde{Z}$, quitte à localiser autour de $f^{-1}(0)$:

$$ w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k = \frac{df}{f} \wedge \eta + \omega + d\alpha \qquad (@@) $$

où les formes $\mathcal{C}^\infty$ η et ω sont $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}(\tilde{Y})$ de $\tilde{Y}$ dans $\tilde{Z}$, de degrés respectifs $n-1$ et n, vérifient :

- i) $d\eta = 0,\ d\omega = 0$
- ii) $Supp\,\eta \cap S = \emptyset,\ Supp\,\omega \cap S = \emptyset.$

et où la $(n-1)-$forme semi-méromorphe α sur $\mathcal{V}(\tilde{Y})$, est à pôles dans $\tilde{Y}$ et à support $mod\,S$. Soit maintenant $\sigma \in \mathcal{C}^\infty_{c/f}(X)$ valant identiquement 1 au voisinage de $\bar{X}''$. Alors la forme semi-méromorphe de degré $n+1$ à poles dans $\tilde{Y}$ et à support $f-$propre dans $\tilde{Z}$

$$ W := d\sigma \wedge (w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k) $$

[23] L'opérateur ${}_k\mathcal{N}$ est nul sur $h^0(k)$ et, en dehors de S, sur $h^1(k)$. Attention, pas sur S pour $n = 2$!

est égale sur $\tilde{Z}$, grace à (@@), à

$$W = -\frac{df}{f} \wedge (d\sigma \wedge \eta) + d\sigma \wedge \omega - d(d\sigma \wedge \alpha)$$

où les formes $d\sigma \wedge \eta$ et $d\sigma \wedge \omega$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}(\tilde{Y})$ de $\tilde{Y}$ dans $\tilde{Z}$, de degrés respectifs n et $n+1$, à supports $f-$propres dans $\mathcal{V}(\tilde{Y})$ vérifient "à fortiori"

- i) $d(d\sigma \wedge \eta) = 0,\ d(d\sigma \wedge \omega) = 0$
- ii) $Supp(d\sigma \wedge \eta) \cap S = \emptyset,\ Supp(d\sigma \wedge \omega) \cap S = \emptyset$.

et où la $n-$forme semi-méromorphe $d\sigma \wedge \alpha$ sur $\mathcal{V}(\tilde{Y})$, est à pôles dans $\tilde{Y}$ et à support $f-$propre $\cap\, mod\, S$ également.
Nous définirons alors

$$2i\pi.\widetilde{var}([w]) := r_c^n(k)(\tilde{v}) \quad \text{avec}$$

$$\tilde{v}_k := v_k + d\sigma \wedge \eta, \quad \text{et} \quad \tilde{v}_j := v_j \quad \forall j \in [1, k-1].$$

Il reste évidemment à vérifier que tout ceci définit bien une application linéaire

$$\widetilde{var} : H^n_{c\cap S}(0) \to H^n_c(0)$$

commutant aux monodromies.

6.2

Commençons par remarquer que si l'on change w par son image par $j_{k,k+k'}$ le résultat de notre construction ne change pas.
Supposons maintenant que $w = \delta(\beta)$ avec $\beta \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$. Alors on peut choisir $u = \mathcal{N}(\beta)$ et on aura

$$w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k = d\beta_k - \rho\frac{df}{f} \wedge \beta_{k-1}.$$

Sur $\tilde{Z}$ on aura donc $w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k = d\beta_k$. Ceci montre que l'on peut prendre $\eta = 0, \omega = 0$ et $\alpha = \beta_k$. Comme on a $v = \delta(\rho.\mathcal{N}(\beta))$ qui induit la classe nulle dans $H^n_c(0)$, ceci montre bien que la modification de w par un cobord ne change pas le résultat de notre construction.
On en déduit immédiatement que si $w = \tau_k(\gamma)$ avec $\gamma \in \Gamma_{c\cap S}(Y, Ker\delta^{n-1}(k))$, alors on trouve 0 dans $H^n_c(0)$. En effet, on peut remplacer w_k par

$j_{k,k+k'}(w_k)$ d'après ce qui précède, et alors on aura d'après l'égalité (@) du début du paragraphe 4.1

$$j_{k,k+k'}(\tau_k(\gamma)) = \tau_{k+k'}\big({}_{k+k'}\mathcal{N}^{k'}(j_{k,k+k'}(\gamma))\big);$$

cet élément est dans $\delta\big(\Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k+k')\big)$ pour $k' \geq k$.
Les changements de choix des fonctions ρ et σ sont laissés en exercice au lecteur.
Le changement du choix de η consiste, d'après le théorème 5.1.1 à remplacer η par $\eta + d\theta$ où $\theta \in \mathcal{C}^{\infty}_{mod\, S}(\tilde{Z})^{n-2}$. Mais on ajoute alors à $\tilde{v}$ le cobord

$$\delta(j_{1,k}(d\sigma \wedge \theta) = j_{1,k}(-d\sigma \wedge d\theta)$$

ce qui ne change pas l'image dans $H^n_c(0)$.
Il nous reste à voir l'action de la monodromie. Si on part de ${}_k\mathcal{N}(w)$ on peut prendre ${}_k\mathcal{N}(u)$ et donc ${}_k\mathcal{N}(\xi)$ dans notre construction. On doit alors prendre l'image de ${}_k\mathcal{N}(\tilde{v}) = {}_k\mathcal{N}(v)$ dans $H^n_c(0)$ ce qui donne bien le résultat attendu. En effet, l'égalité

$$w_{k-1} + \frac{df}{f} \wedge \xi_{k-1} = v_k + d\xi_k$$

permet de voir que sur $\tilde{Z}$, on a $w_{k-1} + \frac{df}{f} \wedge \xi_{k-1} = d\xi_k$. On peut donc choisir $\eta = 0, \omega = 0$ et $\alpha = \xi_k$. Ceci termine nos vérifications sur cette construction.

7 $\mathcal{H} : H^n_{c\cap S}(0) \times H^n(0) \to \mathbb{C}$.

7.1

Nous adopterons ici le point de vue de [B.90] qui est repris dans [B.97].

Théorème 7.1.1 (et définition.) *Sous les hypothèses standards définissons la forme hermitienne canonique*

$$\mathcal{H} : H^n_{c\cap S}(0) \times H^n(0) \to \mathbb{C}$$

de la façon suivante : pour $e \in H^n_{c\cap S}(0)$ *et* $e' \in H^n(0)$ *représentés par* $w \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\,\delta$ *et* $w' \in \Gamma(Y, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\,\delta$ *vérifiant* $[w] = e$ *et* $r^n(k)(w') = e'$ *posons*

$$\mathcal{H}(e, e') = \frac{1}{(2i\pi)^{n+1}} P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho . \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big)$$

où $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ vaut identiquement 1 au voisinage du compact $Supp\, w \cap S$. Notons par $\mathcal{I} : H_c^n(0) \times H^n(0) \to \mathbb{C}$ la dualité (hermitienne) de Poincaré sur la fibre de Milnor F de f l'origine, donnée par

$$\mathcal{I}(a,b) := \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_F a \wedge \bar{b}.$$

Alors on a $\mathcal{H}(e,e') = \mathcal{I}(\widetilde{var}(e), e')$ où l'application $\widetilde{var} : H^n_{c\cap S}(0) \to H_c^n(0)$ a été construite plus haut.

Remarque.

Une conséquence immédiate du théorème 7.1.1 sera l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- La variation est bijective (ou bien $\widetilde{var}$ est bijective).
- La forme hermitienne canonique est non dégénérée.

Nous prouverons la première de ces assertions pour tout $n \geq 3$ à la fin du paragraphe 8, ce qui donnera donc également la non dégénérescence de $\mathcal{H}$. Pour $n = 2$ la forme hermitienne canonique $\mathcal{H}$ passe au quotient par le sous-espace (T-invariant) $j(H^1(S^*, \mathbb{C})$ de $H^2_{c\cap S}(0)$ et induit une dualité hermitienne entre $H^2_{c\cap S}(0)\big/j(H^1(S^*,\mathbb{C})$ et $H^2_{c\cap S}(0)$. Donc, à nouveau, on a un résultat analogue au cas $n \geq 3$ quitte à remplacer $H^2_{c\cap S}(0)$ par son quotient par $j(H^1(S^*,\mathbb{C})$.

La démonstration du théorème 7.1.1 occupera le reste de ce paragraphe 7.

7.2

Commençons par vérifier que le nombre $\mathcal{H}(e,e')$ est bien défini, c'est à dire est indépendant des divers choix effectués.

- Indépendance du choix de ρ
  Soit donc $\rho' \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ valant aussi identiquement 1 au voisinage du compact $Supp\, w \cap S$. Alors on a $Supp\,(\rho - \rho') \cap S = \emptyset$. Donc le prolongement méromophe de

  $$\int_X |f|^{2\lambda}(\rho - \rho').\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k$$

  n'a, au pire, qu'un pôle simple en $\lambda = 0$, ce qui donne l'indépendance désirée.

- Indépendance du choix de w' représentant e'
  Il s'agit en fait de montrer que si on a $w' = \delta v'$ avec $v' \in \Gamma(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$ alors on a

$$P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho . \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{\delta} \bar{v}'_k\big) = 0.$$

  Comme on a $\frac{df}{f} \wedge w'_k = -d(\frac{df}{f} \wedge v'_k)$ ceci va résulter de la formule de Stokes et du fait que $Supp\, d\rho \cap Supp\, w \cap S = \emptyset$, le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ sur $X \setminus S$ n'ayant, au pire, que des pôles simples aux entiers négatifs.

- Indépendance du choix de w représentant e
  Comme ci-dessus, il s'agit en fait de montrer que si on a $w = \delta v$ avec $v \in \Gamma_{c \cap S}(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$ alors on a

$$P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho . \frac{df}{f} \wedge \delta v_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big) = 0.$$

  La preuve est analogue au cas précédent, en choisissant la fonction ρ de façon qu'elle soit identiquement égale à 1 sur un voisinage ouvert de $Supp\, v \cap S$. Ceci est possible grace à la condition de support sur v et à l'indépendance du choix de ρ prouvée ci-dessus.

7.3

Montrons maintenant l'invariance de $\mathcal{H}$ par la monodromie, c'est à dire que l'on a

$$\mathcal{H}(\mathcal{N}(e), e') = \mathcal{H}(e, \mathcal{N}(e')) \quad \forall e \in H^n_{c \cap S}(0), \quad \forall e' \in H^n(0)$$

où $-2i\pi.\mathcal{N}$ désigne le logarithme (nilpotent) de la monodromie agissant sur $H^n_{c \cap S}(0)$ ou bien sur $H^n(0)$. Compte tenu des indépendances de choix prouvés ci-dessus, ceci revient à établir la formule :

$$P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho . \frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big) =$$
$$P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho . \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_{k-1}\big)$$

puisque ${}_k\mathcal{N}(w)$ et respectivement ${}_k\mathcal{N}(w')$ induisent $\mathcal{N}(e)$ et $\mathcal{N}(e')$ dans $H^n_{c \cap S}(0)$ et $H^n(0)$.

Mais pour $\Re(\lambda) \gg 0$ on a

$$d\big(|f|^{2\lambda}\rho.(\frac{df}{f} + \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}) \wedge w_k \wedge \bar{w}'_k\big) \qquad = |f|^{2\lambda}.d\rho \wedge (\frac{df}{f} + \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}) \wedge w_k \wedge \bar{w}'_k +$$

$$-|f|^{2\lambda}\rho.(\frac{df}{f} + \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}) \wedge dw_k \wedge \bar{w}'_k +$$

$$(-1)^{n+1}|f|^{2\lambda}\rho.(\frac{df}{f} + \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}) \wedge w_k \wedge d\bar{w}'_k.$$

Comme on a $Supp\, d\rho \cap Supp\, w \cap S = \emptyset$ le prolongement méromorphe du premier terme du membre de droite de l'égalité ci-dessus n'aura, au pire, qu'un pôle simple en $\lambda = 0$. Par ailleurs le fait que w et w' soit $\delta-$fermées donne

$$dw_k = \frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \quad \text{et} \quad dw'_k = \frac{df}{f} \wedge w'_{k-1}.$$

La formule de Stokes et le prolongement analytique donnent alors la formule désirée.

7.4

Il nous reste à prouver la formule

$$\mathcal{H}(e, e') = \mathcal{I}(\widetilde{var}(e), e')$$

pour achever la preuve du théorème 7.1.1.
Reprenons les notations utilisées au paragraphe 6.1 lors de la construction de $\widetilde{var}(e)$. Pour $\Re\lambda \gg 0$ on aura

$$d\big((|f|^{2\lambda}\sigma.(w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k) \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big) = \lambda.|f|^{2\lambda}\sigma.\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k$$

$$+ |f|^{2\lambda}d\sigma \wedge (w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k) \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k$$

$$+ |f|^{2\lambda}\frac{df}{f} \wedge v_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k$$

puisque $d(w_k + \frac{df}{f} \wedge \xi_k) = \frac{df}{f} \wedge v_k$ et $\sigma.v_k = v_k$.
D'après la formule de Stokes, l'intégrale du membre de gauche n'aura aucun pôle, et, par prolongement analytique, la nullité du résidu en $\lambda = 0$ du membre de droite donnera la relation

$$- P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda}\sigma.\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big) =$$

$$Res\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda}W \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big) + Res\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda}\frac{df}{f} \wedge v_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big).$$

Mais on a
$$W = -\frac{df}{f} \wedge (d\sigma \wedge \eta) + d\sigma \wedge \omega - d(d\sigma \wedge \alpha).$$
Montrons qu'alors
$$Res\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} d\sigma \wedge \omega \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big) = 0 \qquad \text{et}$$
$$Res\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} d(d\sigma \wedge \alpha) \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big) = 0.$$
La nullité du premier résidu est conséquence du fait que la forme ω est $\mathcal{C}^\infty$ et donc qu'il n'y a pas de puissance négative de f dans cette intégrale. On conclut en utilisant que les racines du polynôme de Bernstein de f sont strictement négatives ([K.76]).
Pour montrer que le second résidu est nul, on utilise à nouveau la formule de Stokes et le prolongement analytique pour obtenir
$$Res\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} d(d\sigma \wedge \alpha) \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big) = P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \sigma . \frac{df}{f} \wedge d\alpha \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big).$$
Mais comme le support de $d\alpha$ ne rencontre pas S le membre de droite est nul. Il nous reste donc finalement l'égalité :
$$(2i\pi)^{n+1} . \mathcal{H}(e, e') = -Res\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge (v_k + d\sigma \wedge \eta) \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}'_k\big).$$
Mais la fonction
$$s \rightarrow \big(\frac{i}{2\pi}\big)^n \int_{f=s} (v_k + d\sigma \wedge \eta) \wedge \bar{w}'_k$$
est un polynôme de degré au plus $k-1$ en $Log(|\frac{s}{s_0}|^2)$ dont le terme constant est $\mathcal{I}(\widetilde{var}(e), e')$.
Par transformation de Mellin on obtient la formule désirée. ■

8 Injectivité de la variation.

8.1

Pour montrer que la variation est injective il nous suffit, d'après le théorème (7.1) de montrer que pour toute classe non nulle $e \in H^n_{c \cap S}(0)$ il existe $e' \in H^n(0)$ telle que l'on ait $\mathcal{H}(e, e') \neq 0$. En fait, comme la variation

commute à la monodromie, on peut se contenter de montrer cela pour une classe e qui est invariante par la monodromie.
Soit donc $v \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\,\delta$ définissant la classe e considérée. Comme on suppose que $T(e) = e$, ce qui équivaut à $\mathcal{N}(e) = 0$, on pourra trouver, quitte à choisir k assez grand, $u \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^{n-1}(k))$ vérifiant ${}_k\mathcal{N}(v) = \delta u$ ce qui se traduit par les égalités :

$$v_{j-1} = du_j - \frac{df}{f} \wedge u_{j-1} \quad \forall j \in [1, k] \qquad \text{avec} \quad v_0 = u_0 = 0.$$

On en déduit que l'on a $d\hat{w} = 0$ où l'on a posé $\hat{w} = v_k + \frac{df}{f} \wedge u_{k-1}$. De plus on a l' égalité

$$j_{1,k+1}(\hat{w}) = j_{k,k+1}(v) - \delta\tilde{u}$$

où l'on définit $\tilde{u}_{k+1} = 0$ et $\tilde{u}_j = u_j \quad \forall j \in [1, k]$. Ceci montre que la classe e est représentée par la forme semi-méromorphe $d-$fermée $\hat{w}$ qui a son support dans $c \cap S$.
Remarquons par ailleurs que l'image dans $H^n(0)$ de la classe e peut également être représentée par une forme méromorphe $d-$fermée $w \in \Gamma(Y, \Omega^n)$ grâce au quasi-isomorphisme $(\Omega^\bullet(k), \delta^\bullet) \simeq (\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet)$ pour $k = 1$. On aura alors l'existence de $\gamma \in \Gamma(Y, \mathcal{E}^{n-1}(1))$ vérifiant $w = \tilde{w} + d\gamma$ au voisinage de Y.
La généralisation suivante du résultat de contribution "sureffective" démontrée dans [B.84 b] va nous permettre de conclure dans le cas où l'image de la classe e dans $H^n(0)$ est non nulle. Nous traiterons le cas où cette image est nulle à la fin du paragraphe 8 (voir 8.3 à 8.6).

Théorème 8.1.1 *Soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe non constant de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit $Y = f^{-1}(0)$ et soit S_1 un sous-ensemble analytique fermé de Y tel qu'en chaque point y de $Y \setminus S_1$ la monodromie locale de f en y agissant sur la cohomologie (réduite) de la fibre de Milnor de f ne présente pas la valeur propre 1. Supposons que l'on ait $H^n(X \setminus S_1, \mathbb{C}) = 0$.*
Soit w un n-forme méromorphe d-fermée sur X à pôles dans Y induisant une classe non nulle dans $H^n(F, \mathbb{C})$ où F désigne la fibre de Milnor de f en 0. Supposons qu'il existe des formes semi-méromorphes $\tilde{w}$ et γ sur X à pôles dans Y de degrés respectifs n et $n-1$ vérifiant les conditions suivantes :

- *i)* *Supp $\tilde{w} \cap S_1 = K$ est un compact de X ;*
- *ii)* *On a sur $X \setminus Y$ $w = \tilde{w} + d\gamma$.*

Alors il existe $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n+1})$ et $j \in [1, n]$ *tels que le prolongement méromorphe de l'intégrale*

$$\int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \tilde{w} \wedge \rho.\bar{\omega}$$

ait en $\lambda = 0$ *un pôle d'ordre* ≥ 2 *où* $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ *vaut identiquement* 1 *au voisinage de* K.

Remarques.

- 1) La conclusion du théorème est, bien sur, indépendante du choix de la fonction $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ valant identiquement 1 au voisinage de K puisque si $\sigma \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ vaut identiquement 0 au voisinage de K le support de $\sigma.\tilde{w}$ ne rencontre plus S_1 ce qui implique que le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}\sigma.\tilde{w}$ ne présente que des pôles d'ordre ≤ 1 aux entiers.

- 2) Si la dimension du sous-ensemble analytique (fermé) S_1 de Y est $\leq p$ avec $2p < n+1$ alors la condition $H^n(X \setminus S_1, \mathbb{C}) = 0$ est automatiquement réalisée. On peut s'en convaincre en montrant par récurrence sur p que pour un sous-ensemble analytique fermé de dimension p de $\mathbb{C}^{n+1}$ les faisceaux de cohomologie à support $\underline{H}_S^q(\mathbb{C})$ sont nuls pour $q < 2n - 2p + 1$.

  Nous utiliserons essentiellement le cas $p = 1$ et $n \geq 2$ de ce théorème.

8.2

Démonstration. Posons pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{T}_j^{n,0} := Res(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} w \wedge \square) + P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge \square)$$

et montrons déja que l'on a $d'\mathcal{T}_j^{n,0} = 0$ sur $V := X \setminus K$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On a

$$d' Res(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} w \wedge \square) \;=\; P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w \wedge \square)$$

puisque $dw = d'w = 0$. Par ailleurs

$$d' P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge \square) \;=\; -P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge d'\gamma^{n-1,0} \wedge \square)$$

ce qui donne notre assertion puisque les pôles aux entiers négatifs du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ sont simples au plus le long de $Y \setminus S_1$ et que l'on a $w - d'\gamma^{n-1,0} = \tilde{w}^{n,0} = 0$ au voisinage de $V \cap S_1$.

Supposons maintenant que pour $j = n$ le courant $\mathcal{T}_n^{n,0}$ soit $d'-$exact sur V. C'est à dire qu'il existe un courant $U_n^{n-1,0}$ de type $(n-1,0)$ sur V vérifiant

$$\mathcal{T}_n^{n,0} = d'U_n^{n-1,0} \quad \text{sur} \quad V.$$

Alors, comme on a

$$\bar{f}.\mathcal{T}_{j+1}^{n,0} = \mathcal{T}_j^{n,0} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

on obtient, en posant $U_j^{n-1,0} = \bar{f}^{n-j}.U_n^{n-1,0} \quad \forall j \in [1,n]$

$$\mathcal{T}_j^{n,0} = d'U_j^{n-1,0} \quad \text{sur} \quad V \quad \forall j \in [1,n].$$

Montrons qu'alors les courants sur V définis pour $j \in [1, n-1]$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_j^{n-1,1} := d''U_j^{n-1,0} &+ j.d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{n-1,0} + \\ &- P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge \square) + \\ &+ P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-2,1} \wedge \square)\end{aligned}$$

sont $d'-$fermés sur V. Pour cela calculons $d''\mathcal{T}_j^{n,0} + j.d\bar{f} \wedge \mathcal{T}_{j+1}^{n,0}$. On trouve

$$\begin{aligned}d''\mathcal{T}_j^{n,0} + j.d\bar{f} \wedge \mathcal{T}_{j+1}^{n,0} = &P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w \wedge \square) + \\ &+ P_3(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge \square) + \\ &- P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge d''\gamma^{n-1,0} \wedge \square)\end{aligned}$$

Utilisons maintenant les relations $w = d'\gamma^{n-1,0}$ et $d''\gamma^{n-1,0} + d'\gamma^{n-2,1} = 0$ valables au voisinage de $V \cap S_1$. Elles donnent, puisque l'on a

$$\begin{aligned}&d'P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge \square) = \\ &- P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge d'\gamma^{n-1,0} \wedge \square) + \\ &- P_3(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge \square)\end{aligned}$$

ainsi que

$$d'P_2(\lambda=0,\int_X |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge\gamma^{n-2,1}\wedge\Box) \ = \ -P_2(\lambda=0,\int_X |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge d'\gamma^{n-2,1}\wedge\Box)$$

l'égalité

$$\begin{aligned} d''\mathcal{T}_j^{n,0} + j.d\bar{f}\wedge\mathcal{T}_{j+1}^{n,0} = &- d'P_2(\lambda=0,\int_X |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\wedge\gamma^{n-1,0}\wedge\Box)\ + \\ &+ d'P_2(\lambda=0,\int_X |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge\gamma^{n-2,1}\wedge\Box) \end{aligned}$$

ce qui prouve bien la $d'-$fermeture sur V des courants $\mathcal{T}_j^{n-1,1}$ pour $j\in[1,n-1]$.
Comme on a l'annulation des groupes $H^{p+1}(V,\Omega^q)$ pour tout $p\in[0,n-2]$ et tout $q\in\mathbb{N}$, on peut trouver un courant $U_{n-1}^{n-2,1}$ sur V vérifiant $d'U_{n-1}^{n-2,1} = \mathcal{T}_{n-1}^{n-1,1}$. Posons $U_j^{n-2,1} := \bar{f}^{n-j-1}.U_{n-1}^{n-2,1}$ pour $j\in[1,n-1]$. Alors les hypothèses du lemme suivant sont vérifiées pour $p=0, a=1, b=n-1$.

Lemme 8.2.1 *On suppose donnés sur V des courants $U_j^{n-p-1,p}$ pour $j\in[a,b+1]$ et $U_j^{n-p-2,p+1}$ pour $j\in[a,b]$ où les $U_j^{n-p-1,p}$ vérifient $\bar{f}.U_{j+1}^{n-p-1,p} = U_j^{n-p-1,p}$ pour $j\in[a,b]$ et où les courants $U_j^{n-p-2,p+1}$ vérifient $\bar{f}.U_{j+1}^{n-p-2,p+1} = U_j^{n-p-2,p+1}$ pour $j\in[a,b-1]$.*
Supposons également donnée sur V une forme semi-méromorphe γ de degré $n-1$ à pôles dans $\{f=0\}$ telle que $d\gamma$ soit de type $(n,0)$.
Supposons que l'on ait sur V les égalités de courants suivantes pour $j\in[a,b]$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_j^{n-p-1,p+1} := &\ d''U_j^{n-p-1,p} + j.d\bar{f}\wedge U_{j+1}^{n-p-1,p} + \\ &- P_2(\lambda=0,\int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\wedge\gamma^{n-p-1,p}\wedge\Box) + \\ &P_2(\lambda=0,\int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge\gamma^{n-p-2,p+1}\wedge\Box) \\ = &\ d'U_j^{n-p-2,p+1} \end{aligned}$$

Alors les courants

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_j^{n-p+2,p+2} := &\ d''U_j^{n-p-2,p+1} + j.d\bar{f}\wedge U_{j+1}^{n-p-2,p+1} + \\ &- P_2(\lambda=0,\int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\wedge\gamma^{n-p-2,p+1}\wedge\Box) + \\ &+ P_2(\lambda=0,\int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge\gamma^{n-p-3,p+2}\wedge\Box) \end{aligned}$$

sont $d'-$fermés sur V pour $j\in[a,b-1]$.

Preuve du lemme. On a pour $j \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} d'\big(d''U_j^{n-p-2,p+1}\big) &= -d''\big(d'U_j^{n-p-2,p+1}\big) \\ &= -d''\big(j.\bar{d}f \wedge U_{j+1}^{n-p-1,p}\big) \; + \\ &+ d''\Big(P_2(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \gamma^{n-p-1,p} \wedge \square)\Big) \\ &- d''\Big(P_2(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square)\Big) \end{aligned}$$

et donc

$$d'\big(d''U_j^{n-p-2,p+1}\big) = j.\bar{d}f \wedge d''U_{j+1}^{n-p-1,p} \tag{1}$$

$$- P_2(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge d''\gamma^{n-p-1,p} \wedge \square) \tag{2}$$

$$- P_3(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square) \tag{3}$$

$$j.P_2(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square) \tag{4}$$

$$+ P_2(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge d''\gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square) \tag{5}$$

puisque l'on a

$$\begin{aligned} & d''\Big(\int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square\Big) = \\ & \qquad (\lambda - j).\int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square \quad + \\ & \qquad - \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge d''\gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square \end{aligned}$$

Ensuite on a

$$d'\big(j.\bar{d}f \wedge U_{j+1}^{n-p-2,p+1}\big) = -j.\bar{d}f \wedge d''U_{j+1}^{n-p-1,p} \; + \tag{6}$$

$$- j.\bar{d}f \wedge P_2(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j-1}\frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square) \quad ; \tag{7}$$

puis

$$- d'P_2(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square) =$$

$$- P_3(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square) \tag{8}$$

$$+ P_2(\lambda=0, \int_V |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge d'\gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \square) \tag{9}$$

puisque

$$
\begin{aligned}
& d' \int_V |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \Box = \\
& \lambda . \int_V |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \Box + \\
& - \int_V |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge d' \gamma^{n-p-2,p+1} \wedge \Box .
\end{aligned}
$$

Et enfin

$$
\begin{aligned}
& d'\big(P_2(\lambda = 0, \int_V |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-p-3,p+2} \wedge \Box)\big) = \\
& - P_2(\lambda = 0, \int_V |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge d' \gamma^{n-p-3,p+2} \wedge \Box) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Maintenant les relations

$$
\begin{aligned}
d'' \gamma^{n-p-1,p} + d' \gamma^{n-p-2,p+1} = 0 \\
d'' \gamma^{n-p-2,p+1} + d' \gamma^{n-p-3,p+2} = 0
\end{aligned}
$$

qui résultent de notre hypothèse sur γ ainsi que les égalités

$$
(1) + (6) = 0, (2) + (9) = 0, (3) + (8) = 0, (4) + (7) = 0, (5) + (10) = 0
$$

permettent de conclure. ■

Remarque.
Pour peu que l'on ait $H^{p+2}(V, \Omega^{n-p+2}) = 0$ on peut trouver, sous l'hypothèse du lemme, un courant $U_{b-1}^{n-p+1,p+2}$ sur V vérifiant $d'U_{b-1}^{n-p+1,p+2} = \mathcal{T}_{b-1}^{n-p+2,p+2}$ et poser $U_j^{n-p+1,p+2} = \bar{f}^{b-j-1}.U_{b-1}^{n-p+1,p+2}$ pour $j \in [a, b-a-1]$ et se retrouver à nouveau dans l'hypothèse du lemme pour $p+1, a$ et $b-1$.

Fin de la démonstration du théorème 8.1.1.
Puisque l'on dispose de l'annulation de $H^{p+1}(V, \Omega^q)$ pour tout $p \in [0, n-2]$ et tout $q \in \mathbb{N}$, la remarque ci-dessus permet de continuer à appliquer le lemme $(n-1)-$fois (pour $p \in [0, n-2]$) et d'obtenir un courant $d'-$fermé de type $(0, n)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_1^{0,n} := & d'' U_1^{0,n-1} + d\bar{f} \wedge U_2^{0,n-1} + \\
& - P_2(\lambda = 0, \int_V |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \gamma^{0,n-1} \wedge \Box).
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{T}_1^{0,n}$ est une forme antiholomorphe de degré n sur V. De plus on a

$$d''\mathcal{T}_1^{0,n} + \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \mathcal{T}_1^{0,n} = 0$$

sur $V \backslash Y$ car $d''\gamma^{0,n-1} = 0$ montre que $P_2(\lambda = 0, \int_V |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \gamma^{0,n-1} \wedge \square)$ est annulé par $\wedge \bar{d}f$ et d. Par Hartogs, elle se prolonge en une forme antiholomorphe $\bar{\Omega}_1$ sur X vérifiant $d(f.\Omega_1) = 0$ sur X.
De plus on aura des courants $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sur V de degré $n-1$ vérifiant l'égalité suivante sur $V \setminus S_1 = X \setminus S_1$[24] :

$$\mathcal{T}_1^{n,0} - \bar{\Omega}_1 = d\mathcal{U} + \bar{d}f \wedge \mathcal{V}.$$

Remarquons déja que la $n-$forme holomorphe $d-$fermée $\Omega_0 := f.\Omega_1$ est $d-$exacte sur X. Donc elle induit la classe nulle dans $H^n(F, \mathbb{C})$. Il en sera donc de même pour Ω_1 et pour une $n-$forme holomorphe A vérifiant $dA = df \wedge \Omega_1$, d'après le théorème de positivité de Malgrange (voir [M.74] ou l'appendice de [B.84 b]).
Posons

$$T := Pf(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} w \wedge \square).$$

Montrons que l'on a $dT = \bar{d}f \wedge \mathcal{T}_1^{n,0}$ sur X. En effet, on a

$$d'T = Res(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w \wedge \square) = 0$$

car l'absence de puissance de $\bar{f}$ en dénominateur montre que la fonction méromorphe dont on prend le résidu à l'origine n'a pas de pôles en ce point[25].
De plus on a

$$d''T = Res(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge w \wedge \square)$$

ce qui coïncide bien avec $\bar{d}f \wedge \mathcal{T}_1^{n,0}$ car on a

$$\begin{aligned} P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge \square) = \\ d''Res(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge \square) + \\ + Res(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge d''\gamma^{n-1,0} \wedge \square) \\ = \ 0 \end{aligned}$$

[24]Rappelons que les supports des parties polaires d'ordre ≥ 2 aux entiers du prolongement méromorphes de $|f|^{2\lambda}$ sont contenus dans S_1.

[25]On utilise à nouveau le fait que les racines du polynôme de Bernstein de f sont strictement négatives ! Voir [K.76]

car à nouveau les residus à l'origine sont nuls pour la même raison que ci-dessus.
On obtient donc l'égalité suivante de courants sur $X \setminus S_1$

$$d\big(T - \bar{A} + \bar{d}f \wedge \mathcal{U}\big) = 0$$

Comme on a, par hypothèse, $H^n(X \setminus S_1, \mathbb{C}) = 0$ on en conclut à l'existence d'un courant $\mathcal{W}$ de degré $n-1$ sur $X \setminus S_1$ tel que

$$T = \bar{A} + \bar{d}f \wedge \mathcal{U} + d\mathcal{W}.$$

Alors le Lemme (D) de [B.84 a] donne que w induit la classe nulle dans $H^n(F, \mathbb{C})$ contredisant notre hypothèse.
Donc le courant $\mathcal{T}_n^{n,0}$ n'est pas $d'-$exact sur V. La dualité entre $H^n(X \setminus K, \mathcal{O})$ et $\Gamma(K, \Omega^{n+1})$[26] et la densité de l'image de la restriction $\Gamma(X, \Omega^{n+1}) \to \Gamma(K, \Omega^{n+1})$ permettent alors de trouver une forme holomorphe $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n+1})$ telle que l'on ait $< \mathcal{T}_n^{n,0}, d'\rho \wedge \bar{\omega} > \neq 0$ ce qui donne

$$\begin{aligned} &Res(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n} w \wedge d'\rho \wedge \bar{\omega}) + \\ &P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n} \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge d'\rho \wedge \bar{\omega}) \neq 0 \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned} d\big(|f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n}.w \wedge \rho.\bar{\omega}\big) =& \lambda |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n}.\frac{df}{f} \wedge w \wedge \rho.\bar{\omega} + \\ & (-1)^n |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n}.w \wedge d'\rho \wedge \bar{\omega} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} &Res(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n} w \wedge d'\rho \wedge \bar{\omega}) = \\ &\qquad (-1)^{n+1} P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n} \frac{df}{f} \wedge w \wedge \rho.\bar{\omega}) \end{aligned}$$

Comme on a

$$\begin{aligned} &P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n} \frac{df}{f} \wedge \gamma^{n-1,0} \wedge d'\rho \wedge \bar{\omega}) = \\ &\qquad (-1)^n P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n} \frac{df}{f} \wedge d'\gamma^{n-1,0} \wedge \rho\ .\bar{\omega}) \end{aligned}$$

[26] On peut choisir pour K la trace sur S_1 d'une boule assez grosse.

on obtient finalement

$$P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n} \frac{df}{f} \wedge (w - d'\gamma^{n-1,0}) \wedge \rho \,.\bar{\omega}) \neq 0$$

c'est à dire, vus les types

$$P_2(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-n} \frac{df}{f} \wedge \tilde{w} \wedge \rho \,.\bar{\omega}) \neq 0.$$

Ceci achève la preuve du théorème 8.1.1. ∎

Pour conclure à l'injectivité de la variation dans le cas où l'image de la classe $e \in H^n_{c\cap S}(0)$ dans $H^n(0)$ n'est pas nulle, il suffit de remarquer que si l'on écrit $\omega = \frac{df}{f} \wedge w'$ la décomposition dans le système de Gauss-Manin (localisé) en degré n de f de la forme méromorphe $\frac{w'}{f^n}$ va fournir une classe $e' \in H^n(0)$ vérifiant $\mathcal{H}(e,e') \neq 0$. En effet, les formes méromorphes induisant des classes dans les sous espaces spectraux de la monodromie pour des valeurs propres différentes de 1 ne donneront pas de pôles doubles aux entiers négatifs, pas plus que les formes du type $\frac{df}{f} \wedge du$ où u est méromorphes de degré $n-1$ dans le prolongement méromorphe de

$$\int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \tilde{w} \wedge \bar{\square}.$$

8.3

Le cas plus délicat est celui où la classe e considérée est dans le noyau de l'application $can_{c\cap S} : H^n_{c\cap S}(0) \to H^n(0)$. D'après le théorème 4.1.2 il existe $[\alpha] \in H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$ vérifiant $i([\alpha]) = e$. De plus, comme l'application i est injective, on peut supposer que l'on a $T([\alpha]) = [\alpha]$ dans $H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$.
Les lemmes suivants vont nous fournir un représentant de la classe $[\alpha]$ considérée qui met en évidence la propriété d'invariance par la monodromie.

Lemme 8.3.1 *Supposons* $n \geq 3$. *Soit* $[\alpha] \in H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$ *vérifiant* $T(i([\alpha])) = i([\alpha])$ *dans* $H^n_{c\cap S}(0)$. *Alors, pour* k *assez grand, il existe un représentant*
$\hat{\alpha} \in \Gamma(S^*, Ker\, \delta^{n-1}(k+1))$ *tel que l'on ait*

$$\mathcal{N}(\hat{\alpha}) \in \Gamma(Y, Ker\, \delta^{n-1}(k+1))$$

et dont l'image dans $H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$ *est* $[\alpha]$.

Preuve. Pour $k \gg 1$ on a un isomorphisme $r^{n-1}(k) : h^{n-1}(k) \to H^{n-1}(0)$. Puisque l'on a $H^1(S, H^{n-1}(0)) = 0$ et l'annulation de $H^1(S^*, \delta\mathcal{E}^{n-2})$ prouvée au lemme 4.1.3, on peut relever $[\alpha]$ en une section $\alpha' \in \Gamma(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k))$. Grace à l'annulation de $H^1(Y, \delta\mathcal{E}^{n-2})$ prouvée au lemme 4.1.3, l'hypothèse $T[\alpha] = [\alpha]$ dans $H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$ permet de trouver $\beta \in \Gamma(Y, Ker\,\delta^{n-1}(k))$ et $\Gamma \in \Gamma(S^*, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k))$ vérifiant

$$\mathcal{N}\alpha' = \beta + \Gamma \quad \text{au voisinage de } S^*.$$

Ceci se déduit d'une "chasse" facile sur le diagramme commutatif exact d'espaces vectoriels monodromiques :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & \\
 & & H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0)) \arrow[u] & \\
H^0(S^*, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k)) \arrow[r] & H^0(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k)) \arrow[r] & H^0(S^*, H^{n-1}(0)) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
H^0(Y, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k)) \arrow[r] \arrow[u] & H^0(Y, Ker\,\delta^{n-1}(k)) \arrow[r] \arrow[u] & H^0(Y, H^{n-1}(0)) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

La suite exacte

$$0 \to Ker\,\delta^{n-2}(k) \to \mathcal{E}^{n-2}(k) \to \delta\mathcal{E}^{n-2}(k) \to 0$$

donne, pour $n \geq 4$ la surjectivité de la flèche

$$\delta : H^0(S^*, \mathcal{E}^{n-2}(k)) \to H^0(S^*, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k))$$

puisque, pour $n \geq 4$, on a $Ker\,\delta^{n-2}(k) \simeq \delta\mathcal{E}^{n-3}(k)$ et que l'annulation du $H^1(S^*, \delta\mathcal{E}^{n-3}(k))$ est donnée par le lemme 4.1.3. On peut donc trouver $\gamma \in \Gamma(S^*, \mathcal{E}^{n-2}(k))$ vérifiant $\Gamma = \delta\gamma$. Pour $n = 3$ on a $H^1(S^*, Ker\,\delta^1(k)) \simeq H^1(S^*, h^1(k)) \neq 0$. Mais l'application

$$j_{k,k+1} : H^1(S^*, h^1(k)) \to H^1(S^*, h^1(k+1))$$

est nulle (voir (1.6)) et quitte à changer k en $k+1$ on peut lever l'obstruction et trouver également $\gamma \in \Gamma(S^*, \mathcal{E}^{n-2}(k+1))$ vérifiant $\Gamma = \delta\gamma$.
Définissons alors $\hat{\alpha} \in \Gamma(S^*, Ker\,\delta^{n-1}(k+1))$ en posant

$$\hat{\alpha}_{k+1} = \alpha'_k + \frac{df}{f} \wedge \gamma_k \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_j = \beta_j \quad \forall j \in [1, k].$$

L'égalité $\delta\hat{\alpha} = 0$ est immédiate et on a $\mathcal{N}(\hat{\alpha}) = j_{k,k+1}(\beta)$ ce qui achève la preuve. ■

Lemme 8.3.2 (Variante pour $n = 2$.) *Si $\alpha \in \mathcal{K}$ vérifie $\mathcal{N}([\alpha]) = 0$ dans $H^1_{\{0\}}(S, H^1(0))$, il existe $k \gg 1$ et $\hat{\alpha} \in \Gamma(S^*, Ker\,\delta^1(k))$ tel que $\mathcal{N}(\hat{\alpha})$ soit la restriction à S^* d'un élément de $\Gamma(Y, , Ker\,\delta^1(k))$, et induisant la classe de α dans*

$$\frac{\mathcal{K}}{H^1(S^*, \mathbb{C})} \simeq H^1_{\{0\}}(S, H^1(0)).$$

Preuve. Pour $k \gg 1$ on peut représenter α par $\tilde{\alpha} \in \Gamma(S^*, Ker\,\delta^1(k)$; de plus on peut également trouver $\beta \in \Gamma(S, Ker\,\delta^1(k))$ et $\Gamma \in \Gamma(S^*, \delta\mathcal{E}^0(k)$ vérifiant

$$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = \beta + \Gamma.$$

Comme $\lim_{k\to\infty} h^1(k) \simeq H^1(0)$ est à support dans S, on peut supposer également que β est la restriction à S de $\tilde{\beta} \in \Gamma(Y, Ker\,\delta^1(k)$.
Comme la monodromie est l'identité sur $H^1(S^*, \mathbb{C})$, on peut trouver un élément $\gamma \in \Gamma(S^*, \mathcal{E}^0(k))$ vérifiant $\mathcal{N}(\Gamma) = \delta\gamma$. On aura alors

$$\tilde{\Gamma} := \begin{pmatrix} \Gamma_k + \frac{df}{f} \wedge \gamma_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_k \\ \Gamma_{k-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_k \\ \vdots \\ \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Donc, quitte à ajouter un cobord (et à changer k en $k+1$) on peut supposer que

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} + \tilde{\Gamma}$$

avec $\Gamma_j = 0$ pour $j \neq k$.
Posons alors $\hat{\alpha}_{k+1} = \alpha_k - \tilde{\Gamma}_k$ et $\hat{\alpha}_j = \beta_j \quad \forall j \in [1, k]$. Alors $\hat{\alpha}$ vérifie bien les propriétés requises. ■

Lemme 8.3.3 *Dans la situation du lemme 8.3.1 ci-dessus, il existe (quitte à restreindre X) une $n-$forme semi-méromorphe $\hat{w}$ qui est définie et $d-$fermée dans $X^* = X \setminus \{0\}$ et à support dans $mod\,S$, qui, restreinte à $X\setminus\bar{X}'\setminus Y$, induit l'image de la restriction de $i[\alpha]$ dans $H^n_{mod\,S}(X\setminus\bar{X}'\setminus Y, \mathbb{C})$.*

Preuve. Fixons un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de S^* dans X^* et supposons que, quitte à restreindre le disque de centre 0 dans $\mathbb{C}$ qui définit X, la section β construite au lemme 8.3.1 est définie et $\delta-$fermée sur X. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W})$ valant identiquement 1 près de S^* et identiquement nulle près de $\partial\mathcal{W}$. Nous la prolongerons par 0 sur X^*. Posons alors

$$\hat{w} = d\chi \wedge \hat{\alpha}_{k+1} - (1-\chi)\frac{df}{f} \wedge \beta_k$$
$$\beta'_j = \beta_j \quad \forall j \in [1,k] \quad \text{et} \quad \beta'_{k+1} = 0.$$

On a alors

$$d\chi \wedge \hat{\alpha} = j_{1,k+1}(\tilde{w}) + \delta((1-\chi).\beta').$$

Comme $(1-\chi).\beta'$ est à support dans $mod\, S$, on en déduit que la $n-$forme semi-méromorphe $\hat{w}$ vérifie les propriétés demandées. ■

Remarque importante.

Si la classe définie par $\hat{w}$ dans $H^n_{mod\, S}(X^* \setminus Y^*, \mathbb{C})$ est nulle, on peut trouver une $(n-1)-$forme semi-méromorphe ε sur X^* à pôles dans Y^* et à support dans $mod\, S$[27] et vérifiant

$$\hat{w} = d\varepsilon \quad \text{sur } X^*.$$

Posons alors

$$\gamma := \chi.\hat{\alpha} - (1-\chi).\beta' - j_{1,k+1}(\varepsilon).$$

Comme $\delta\gamma = 0$ cela définit une classe dans

$$\mathbb{H}^{n-1}(X^*, (\mathcal{E}^\bullet(k+1), \delta^\bullet)$$

qui s'identifie au $(n-1)-$ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de f à l'origine. On a donc un élément de $H^0(S, H^{n-1}(0))$. Mais ceci montre, puisque ε et $(1-\chi)$ sont nulles au voisinage de S^* que la section correspondante sur S du faisceau $H^{n-1}(0)$ prolonge la section "initiale" $\alpha \in H^0(S^*, H^{n-1}(0))$. Ceci montre que la nullité de $\hat{w}$ dans l'espace $H^n_{mod\, S}(X^* \setminus Y^*, \mathbb{C})$ implique celle de la classe de α dans $H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$.

Lemme 8.3.4 (Variante pour $n = 2$.) *L'énoncé est ici le même qu'en 8.3.3 sauf que l'on obtient dans l'espace $H^2_{mod\, S}((X \setminus \bar{X}') \setminus Y, \mathbb{C})$ qu'une égalité* **modulo** *l'image dans cet espace du sous-espace $i \circ j(H^1(S^*, \mathbb{C}))$.*

La preuve est analogue.

[27] ce qui signifie que l'adhérence de son support dans X^* ne rencontre pas S^*.

La remarque importante qui suit le lemme 8.3.3 est valable pour $n = 2$. Dans ce cas, elle donne que la classe initiale de $\mathcal{K}$ dont on part, est dans $j(H^1(S^*, \mathbb{C}))$ dès que la classe de $\hat{w}$ dans $H^n_{mod\,S}(X^* \setminus Y^*, \mathbb{C})$ est nulle.

On remarquera que l'image dans $H^2_{c \cap S}(0)$ de $j(H^1(S^*, \mathbb{C}))$ (modulo laquelle on travaille) est l'image par la restriction naturelle de $H^2_{mod\,S}(X^*, \mathbb{C})$. Ceci résulte de notre construction et de l'isomorphisme

$$H^2_{mod\,S}(X^*, \mathbb{C}) \simeq H^1(S^*, \mathbb{C})$$

qui découle facilement des annulations des $H^i(X^*, \mathbb{C})$ pour $i = 1, 2$.

8.4

Notre stratégie, pour terminer la preuve de l'injectivité de la variation pour $n \geq 3$, consiste à considérer le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes d'après le théorème 5.1.1[28] :

$$\begin{tikzcd}
H^n_{mod\,S}(X^*) \arrow[r] & H^n_{mod\,S}(X^* \setminus Y^*) \arrow[r, "Res"] \arrow[d, "r"] & H^{n-1}_{mod\,S}(Y^*) \arrow[r] \arrow[d, "r'"] & H^{n+1}_{mod\,S}(X^*) \\
\cdots \arrow[r] & H^n_{mod\,S}(X \setminus \bar{X}' \setminus Y) \arrow[r, "Res'"] & H^{n-1}_{mod\,S}(Y \setminus \bar{Y}') \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \cdots \\
 & & H^n_c(0) &
\end{tikzcd}$$

et à montrer les propriété suivantes qui permettent facilement de conclure que si $\partial \circ Res'$ annule l'image de $\hat{w}$ dans $H^n_{mod\,S}(X \setminus \bar{X}' \setminus Y)$ alors c'est que cette image est déja nulle ; mais alors l'image de $d\chi \wedge \tilde{\alpha}$ est également nulle dans ce même espace. Le théorème 4.1.2 donne alors que la classe de $\alpha \in H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$ est nulle. Ceci achève donc la preuve de l'injectivité de la variation pour $n \geq 3$, modulo la démonstration des assertions suivantes:

- 1) La restriction de $\hat{w}$ est dans l'image de l'application de restriction notée r .
- 2) L'application de résidu Res est un isomorphisme, grace à l'annulation des groupes $H^i_{mod\,S}(X^*)$ pour $i = n, n+1$ pour $n \geq 3$.
- 3) La composée $\partial \circ r'$ est injective.

[28]Touts ces groupes de cohomologie sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Les lemmes 8.3.1 et 8.3.3 donnent déja la propriété 1).
Montrons donc les annulations qui donnent la seconde propriété pour $n \geq 3$. Comme on a $H^i(X^*) = 0$ pour $i = n, n+1$ il nous suffit de montrer que si $\psi \in \mathcal{C}^\infty(X^*)$ est de degré $n-1$ ou n et a une différentielle identiquement nulle au voisinage de S^* il existe $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{mod\, S}(X^*)$ telle que $d\chi = d\psi$ sur X^*. Comme on a $n \geq 3$ on a une base de voisinages ouverts $\mathcal{W}$ de S^* dans X^* qui vérifient $H^i(\mathcal{W}) = 0$ pour $i \geq 2$. Ceci permet aisément de conclure.

Il nous reste à montrer l'injectivité de la flèche

$$\partial \circ r' : H^{n-1}_{mod\, S}(Y^*) \to H^n_c(0)$$

qui est définie comme suit : à $\psi \in \mathcal{C}^\infty_{mod\, S}(\mathcal{V}(Y^*))$ vérifiant $d\psi = 0$ on associe la restriction à $\{f = s\}$ pour s assez voisin de 0 de la forme $d\rho \wedge \psi$ où $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(X)$ vaut identiquement au voisinage de l'origine.
Cette injectivité va résulter d'un théorème général.

Théorème 8.4.1 *Notons respectivement par* $\mathbb{H}^p_c(k)$ *et* $\mathbb{H}^p_{c\cap S}(k)$ *les groupes d'hypercohomologie à supports* $\mathbb{H}^p_c(Y, \mathcal{E}(k)^\bullet, \delta^\bullet)$ *et* $\mathbb{H}^p_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}(k)^\bullet, \delta^\bullet)$*. Alors on a, pour chaque* $k \geq 1$ *la suite exacte longue d'espaces vectoriels monodromiques :*

$$\to \mathbb{H}^{p-1}_{mod\, S}(\partial Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet) \xrightarrow{j} \mathbb{H}^p_c(k) \xrightarrow{can_{c,S}} \mathbb{H}^p_{c\cap S}(k) \xrightarrow{\eta} \mathbb{H}^p_{mod\, S}(\partial Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet) \to$$

où l'on a noté par $\mathbb{H}^p_{mod\, S}(\partial Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet)$ *la limite inductive quand* $\varepsilon' \to \varepsilon$ *de* $\mathbb{H}^p_{mod\, S}(Y \setminus \bar{Y}', \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet)$ *avec* $Y' = Y \cap X'$ *où* X' *est la trace sur* X *de la boule de centre* 0 *et de rayon* ε'[29].

Démonstration. Commençons par définir l'application j. Fixons

$$X' := B(0, \varepsilon') \cap f^{-1}(D) \subset X = B(0, \varepsilon) \cap f^{-1}(D), \varepsilon - \varepsilon' \ll \varepsilon \ll 1.$$

Soit φ une section de $\mathcal{E}^{p-1}(k)$ sur $X \setminus \bar{X}'$ identiquement nulle au voisinage de S et $\delta-$fermée. Soit, de plus, $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$, une fonction identiquement égale à 1 au voisinage de $\bar{X}'$ et à support $f-$propre. Alors $j(\varphi) = d\rho \wedge \varphi = \delta((\rho - 1).\varphi)$ est dans $\Gamma_c(Y, Ker\, \delta \cap \mathcal{E}^p(k))$; elle définit donc un élément de $\mathbb{H}^p_c(k)$. Montrons que ceci définit bien une application linéaire

$$j : \mathbb{H}^{p-1}_{mod\, S}(\partial Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet) \to \mathbb{H}^p_c(k).$$

[29]Rappelons que X est l'intersection de la boule de centre 0 et de rayon ε avec $f^{-1}(D_\eta)$.

Si φ est l'image par δ d'une section $\psi \in \Gamma_{mod\, S}(\partial Y, \mathcal{E}^{p-2}(k))$ alors on aura

$$d\rho \wedge \delta\psi = \delta(-d\rho \wedge \psi).$$

où l'on a $d\rho \wedge \psi \in \Gamma_c(Y, \mathcal{E}^{p-1}(k))$, en prolongeant par 0.
On a clairement $j \circ_k \mathcal{N} =_k \mathcal{N} \circ j$ ce qui montre l'aspect monodromique de l'application linéaire j.
On remarquera que pour $k = 1$ cette application est bien compatible avec l'application ∂ considérée plus haut.
Identifions le noyau de j ; si on a $d\rho \wedge \varphi = \delta\gamma$ où $\gamma \in \Gamma_c(Y, \mathcal{E}^{p-1}(k))$, on aura, quitte à augmenter la taille de X', que la restriction $\tilde{\gamma}$ de γ à $X \setminus \bar{X}'$ sera dans $\Gamma_{mod\, S}(\partial Y, \mathcal{E}^{p-1}(k))$ et vérifiera $d\rho \wedge \varphi = \delta\tilde{\gamma}$. Alors $\gamma + (1-\rho).\varphi$ définira un élément de $\mathbb{H}^{p-1}_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet)$. La construction de l'analogue η en degré $(p-1)$ de l'application η que nous allons définir maintenant montrera que le noyau de j est bien l'image de $\mathbb{H}^{p-1}_{c\cap S}(k)$ par η.
La construction de l'application η est très simple.
Si $w \in \Gamma_{c\cap S}(Y, Ker\, \delta \cap \mathcal{E}^p(k))$ pour un choix de X' assez gros, la restriction de w à $Y \cap (X \setminus \bar{X}')$ est à support dans $mod\, S$ et donne une classe dans $\mathbb{H}^p_{mod\, S}(\partial Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet)$. On vérifie immédiatement que ceci passe au quotient. L'application est donc bien définie et elle est clairement linéaire et monodromique.
De plus, il est clair que si w est à support compact, son image par η est nulle.
Réciproquement, si $\eta[w] = 0$, alors on peut écrire sur ∂Y :

$$w = \delta v$$

avec $v \in \Gamma_{mod\, S}(\partial Y, \mathcal{E}^{p-1}(k))$. Alors pour $\rho \in \mathcal{C}^\infty_{c/f}(X)$ valant identiquement sur $\bar{X}'$ avec X' assez gros, on aura $w' := w - \delta((1-\rho).v)$ qui représentera la classe $[w] \in H^p_{c\cap S}(0)$ et sera à support compact sur Y. Donc $[w]$ est bien dans l'image de $can_{c,S}$.
Pour achever la démonstration il nous reste à montrer que le noyau de l'application

$$can_{c,S} : \mathbb{H}^p_c(k) \to \mathbb{H}^p_{c\cap S}(k)$$

est bien l'image de j. Soit donc $v \in \Gamma_{c\cap S}(Y, Ker\, \delta \cap \mathcal{E}^{p-1}(k))$ tel que $w = \delta v$ soit à support compact dans Y. Alors v définit par restriction à ∂Y un élément $[v]$ de $\mathbb{H}^{p-1}_{mod\, S}(\partial Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet)$. Pour calculer $j([v])$ choisissons ρ comme ci-dessus[30]. Alors on aura $j([v]) = [d\rho \wedge v] = \delta((\rho - 1).v)$. Mais on a

$$\delta v - \delta(\rho.v) = \delta((1-\rho).v)$$

[30]et tel que l'on ait $Supp(d\rho) \cap Supp(\delta v) = \emptyset$.

avec $(1-\rho).v \in \Gamma_c(Y, \mathcal{E}^{p-1}(k))$ et donc la classe de $j([v])$ dans $\mathbb{H}^p_c(k)$ coïncide bien avec celle de $w = \delta v$. $\blacksquare$

Pour terminer la preuve de l'injectivité de la variation (c'est à dire pour déduire l'assertion 3) du début du paragraphe 8.4, il nous suffit de montrer que pour $n \geq 3$ la flèche η en degré $n-1$ de la suite exacte longue de 8.4.1 est nulle, ce qui résulte de la proposition suivante.

Proposition 8.4.2 *Sous les hypothèses standards pour $n \geq 3$ l'application canonique*

$$can_{c,S} : \lim_{k\to\infty} \mathbb{H}^{n-1}_c(k) \to \lim_{k\to\infty} \mathbb{H}^{n-1}_{c\cap S}(k)$$

est un isomorphisme. De plus, pour $n \geq 4$ ces deux groupes sont nuls.

Preuve. Commençons par montrer le lemme suivant

Lemme 8.4.3 *Pour $n \geq 4$ on a $H^{n-1}_{c\cap S}(Y, \mathbb{C}) = 0$. Pour $n = 2, 3$ on a l'isomorphisme $H^{n-1}_{c\cap S}(Y, \mathbb{C}) \simeq H^{n-1}_{\{0\}}(S, \mathbb{C})$.*

Preuve. Comme on peut remplacer Y par la limite inductive de ses voisinages ouverts, on peut calculer $H^{n-1}_{c\cap S}(Y, \mathbb{C})$ à l'aide du complexe de de Rham des germes de formes différentielles à support dans $c \cap S$. Soit donc φ un tel germe d-fermé de degré $n-1$. Comme $H^{n-1}(Y, \mathbb{C}) = 0$ puisque Y est contractible, on peut trouver un germe ψ de degré $n-2$ vérifiant $d\psi = \varphi$. Si K est un compact de S assez gros, on aura $d\psi = 0$ au voisinage de $S \setminus K$. On constate alors que si la classe de cohomologie définie par ψ dans $H^{n-2}(S \setminus K, \mathbb{C})$ est nulle pour $n \geq 3$ ou prolongeable à S pour $n = 2$ alors la classe définie par φ est nulle dans $H^{n-1}_{c\cap S}(Y, \mathbb{C})$. Ceci permet alors de construire un isomorphisme $H^{n-1}_{c\cap S}(Y, \mathbb{C}) \simeq H^{n-1}_{\{0\}}(S, \mathbb{C})$ ce qui achève la preuve puisque pour $n \geq 4$ le groupe $H^{n-1}_{\{0\}}(S, \mathbb{C})$ est nul. $\blacksquare$

8.5 Preuve de la proposition 8.4.2.

Supposons maintenant $n \geq 3$ et notons par Φ une famille paracompactifiante de fermés de Y égale soit à c ou bien à $c \cap S$. Comme les faisceaux $\mathcal{E}^\bullet(k)$ sont fins, on aura

$$\mathbb{H}^{n-1}_\Phi(Y, \mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet) \simeq \Gamma_\Phi(Y, Ker\, \delta^{n-1}(k)) \big/ \delta\Gamma_\Phi(Y, \mathcal{E}^{n-2}(k)).$$

Soit maintenant $w \in \Gamma_\Phi(Y, Ker\,\delta^{n-1}(k))$. Alors si K est un compact de Y assez gros, w est identiquement nulle au voisinage de $S \setminus K$. La suite exacte

$$0 \to \delta\mathcal{E}^{n-2}(k) \to Ker\,\delta^{n-1} \to H^{n-1}(0) \to 0.$$

donne alors

$$0 \to \Gamma_\Phi(Y, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k)) \to \Gamma_\Phi(Y, Ker\,\delta^{n-1}) \xrightarrow{r} \Gamma_\Phi(Y, h^{n-1}(k)) \to H^1_\Phi(Y, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k)) \cdots$$

Et comme, pour $n \geq 3$ le faisceau $h^{n-1}(k)$ est à support dans S, on aura

$$r(w)|_{S\setminus K} \equiv 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_\Phi(S \setminus K, h^{n-1}(k)) \simeq \Gamma_\Phi(Y \setminus K, h^{n-1}(k)).$$

Comme, de plus, $h^{n-1}(k)$ est un système local sur S^* et n'admet pas de section non nulle à support l'origine, on aura $r(w) = 0$ et on en conclut que $w \in \Gamma_\Phi(Y, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k))$.
Les suites exactes

$$0 \to \delta\mathcal{E}^{q-1}(k) \to \mathcal{E}^q(k) \to \delta\mathcal{E}^q(k) \to 0$$

pour $2 \leq q \leq n-2$ conduisent aux isomorphismes, puisque les faisceaux $\mathcal{E}^q(k)$ sont fins et la famille de supports Φ est paracompactifiante

$$\Gamma_\Phi(Y, \delta\mathcal{E}^{n-2}(k))\big/\delta\Gamma_\Phi(Y, \mathcal{E}^{n-2}(k)) \simeq H^1_\Phi(Y, \delta\mathcal{E}^{n-3}(k)) \simeq \cdots \simeq H^{n-3}_\Phi(Y, \delta\mathcal{E}^1(k)).$$

Bien sur pour $n = 3$ on doit remplacer $H^{n-3}_\Phi(Y, \delta\mathcal{E}^1(k))$ par son quotient par $\delta H^0_\Phi(Y, \mathcal{E}^1(k))$.
La suite exacte

$$0 \to Ker\,\delta^1(k) \to \mathcal{E}^1(k) \to \delta\mathcal{E}^1(k)) \to 0$$

donne alors l'isomorphisme $H^{n-3}_\Phi(Y, \delta\mathcal{E}^1(k)) \simeq H^{n-2}_\Phi(Y, Ker\,\delta^1(k))$.
Les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \to \delta\mathcal{E}^0(k) \to Ker\,\delta^1(k) \to h^1(k) \to 0 \\ 0 \to h^0(k) \to \mathcal{E}^0(k) \to \delta\mathcal{E}^0(k) \to 0 \end{aligned}$$

combinées avec le fait que $j_{k,k+1} : h^1(k) \to h^1(k+1)$ est nulle, donnent un isomorphisme

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \mathbb{H}^{n-1}_\Phi(k) \simeq \lim_{k\to\infty} H^{n-2}_\Phi(Y, Ker\,\delta^1(k)) \simeq \lim_{k\to\infty} H^{n-2}_\Phi(Y, \delta\mathcal{E}^0(k)) \\ \simeq \lim_{k\to\infty} H^{n-1}_\Phi(Y, h^0(k)) \simeq H^{n-1}_\Phi(Y, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve de la proposition 8.4.2, il suffit donc de voir que l'application canonique

$$H^{n-1}_{c\cap S}(Y,\mathbb{C}) \to H^{n-1}_c(Y,\mathbb{C})$$

est un isomorphisme pour $n \geq 3$, et entre groupes nuls pour $n \geq 4$.
Ceci résulte du lemme 8.4.3. ■

Ceci achève donc la preuve de l'injectivité de la variation pour $n \geq 3$. On a donc également établi la non dégénérescence de la forme hermitienne canonique (voir le paragraphe 7) et l'égalité de dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} \big(Im\,\theta\big) = \dim_{\mathbb{C}} \big(H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))\big).$$

Cette égalité implique que $Im\,\theta$ coïncide avec l'orthogonal dans $H^1(S^*, H^{n-1}(0))$ du sous espace $H^0(S, H^{n-1}(0))$ de $H^0(S^*, H^{n-1}(0))$ pour l'accouplement non dégénéré déduit de la forme hermitienne canonique sur le système local $H^{n-1}(0))$ (voir le paragraphe 3).

8.6 Le cas $n = 2$.

Nous allons montrer que les résultats précédents s'étendent "mutadis mutandis" au cas $n = 2$ quitte à remplacer l'espace vectoriel monodromique $H^2_{c\cap S}(0)$ par le quotient

$$\frac{H^2_{c\cap S}(0)}{H^1(S^*,\mathbb{C})}$$

où l'inclusion j de $H^1(S^*,\mathbb{C})$[31]a été définie au Lemme 4.1.4 (voir aussi le paragraphe 4.4).
Nous allons seulement préciser les points de la démonstration du cas $n \geq 3$ qui sont à modifier de façon significative dans ce cas.

8.6.1

Commençons par remarquer que toute la première partie de la preuve de l'injectivité de la variation, à savoir les paragraphes 8.1 et 8.2 , restent valables tels quels, grâce, entre autres, au fait que le sous-espace $j(H^1(S^*,\mathbb{C}))$ de $H^2_{c\cap S}(0)$ est formé de vecteurs invariants par la monodromie.
Il n'en n'est pas de même pour la seconde partie de cette preuve.

[31]muni de la monodromie triviale, c'est à dire égale à l'identité.

- 1) Les lemmes 8.3.1 et 8.3.3 doivent être remplacés par les variantes 8.3.2 et 8.3.4 qui les suivent.
- 2) L'assertion 2) du paragraphe 8.4 doit être remplacée par l'assertion suivante:

  L'application Res est surjective et son noyau a pour image par r l'image injective par la restriction à $(X \setminus \bar{X}') \setminus Y$ du sous espace $j(H^1(S^*, \mathbb{C}))$ de $H^2_{c\cap S}(0)$.

  Ceci est une conséquence facile de la remarque qui conclut le paragraphe 8.3.
- 3) On a pour $n = 2$, $H^1_c(0) \simeq 0$ et $H^1_{c\cap S}(0) \simeq H^1_{\{0\}}(S, \mathbb{C})$. De plus, un élément de $\mathcal{K}\big/j(H^1(S^*, \mathbb{C})$ invariant par la monodromie donne une classe nulle par l'application Res du diagramme du début du paragraphe 8.4, si et seulement si cet élément est nul.

Preuve de l'assertion 3). L'annulation de $H^1_c(0)$ résulte du fait que la fibre de Milnor F de f à l'origine est une variété de Stein de dimension 2 ; donc $H^3(F, \mathbb{C}) \simeq 0$ et par dualité de Poincaré on a $H^1_c(F, \mathbb{C}) \simeq 0$.
L'isomorphisme

$$\frac{H^0(S^*, \mathbb{C})}{H^0(S, \mathbb{C})} \simeq H^1_{\{0\}}(S, \mathbb{C}) \to H^1_{c\cap S}(Y, \mathbb{C})$$

est donné par la flèche

$$\varepsilon : H^0(S^*, \mathbb{C}) \to H^1_{c\cap S}(Y, \mathbb{C})$$

définie de la façon suivante : à la fonction localement constante φ au voisinage de S^* on associe la classe $[\varphi.d\chi]$ où $\chi \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ vaut identiquement au voisinage de ∂S et s'annule identiquement dès que l'on s'éloigne de ∂S. On constate facilement que ceci ne dépend pas du choix de la fonction χ et passe au quotient par $H^0(S, \mathbb{C})$[32].
L'application induite par ε est injective : si $\varphi.d\chi = d\psi$ où $\psi \in \mathcal{C}^\infty_{c\cap S}(Y)$, on aura $d(\psi - \chi.\varphi) = 0$ sur Y, et donc $\psi - \chi.\varphi$ sera localement constante (donc constante) sur Y. Comme ψ est nulle et χ vaut identiquement 1 près de ∂S, ceci montre que φ se prolonge en une constante sur Y et donc induit la classe nulle dans $H^1_{\{0\}}(S, \mathbb{C})$.

[32]Si φ est constante au voisinage de S on peut prolonger la constante à Y et alors $\varphi.d\chi = d\big((1 - \chi).\varphi\big)$ montre que la classe $[\varphi.d\chi]$ est nulle dans $H^1_c(0)$.

L'application induite par ε est surjective : si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty_{c\cap S}(Y)^1$ est $d-$fermée, on peut l'écrire, puisque Y est contractible, $\alpha = d\beta$ avec $\beta \in \mathcal{C}^\infty(Y)^0$. On en déduit que β est localement constante au voisinage de ∂S. Soit φ la fonction localement constante au voisinage de S^* qu'elle définie. Alors l'égalité $\alpha - d(\chi.\varphi) = d\big((1-\chi).\beta\big)$ montre, puisque $(1-\chi).\beta$ est à support dans $c \cap S$ que l'on a $\varepsilon([\varphi]) = [\alpha]$.
Il nous reste à montrer que l'application évidente

$$H^1_{c\cap S}(Y, \mathbb{C}) \to H^1_{c\cap S}(0)$$

est un isomorphisme.
Elle est injective : si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty_{c\cap S}(Y)^1$ est $d-$fermée et si $j_{1,k}(\alpha) = \delta\beta$ avec $\beta \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^0(k))$, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= d\beta_k - \frac{df}{f} \wedge \beta_{k-1} \\ \text{et} \quad d\beta_j - \frac{df}{f} \wedge \beta_{j-1} &= 0 \quad \forall j \in [1, k-1] \end{aligned}$$

avec la convention $\beta_0 := 0$. Alors $d\beta_1 = 0$ et donc $\beta_1 = 0$ puisque c'est une fonction localement constante et nulle près de ∂S. On en déduit de même que les β_j sont nulles pour $j \in [1, k-1]$. Il nous reste alors seulement l'équation sur Y

$$\alpha = d\beta_k.$$

Mais une fonction semi-méromorphe dont la différentielle est $\mathcal{C}^\infty$ est $\mathcal{C}^\infty$: on se ramène au cas méromorphe par le lemme de Dolbeault (local) et on conclut par le lemme de de Rham holomorphe.
On a donc $[\alpha] = 0$ dans $H^1_{c\cap S}(Y, \mathbb{C})$.
Elle est surjective : si $\gamma \in \Gamma_{c\cap S}(Y, Ker\, \delta^1(k))$, comme on a la nullité de $H^0_{c\cap S}(Y, H^1(0))$ ainsi que l'isomorphisme $\lim\limits_{k\to\infty} h^1(k) \simeq H^1(0)$, quitte à augmenter k, on peut supposer que $\alpha \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \delta\mathcal{E}^0(k))$. Mais la suite exacte

$$0 \to h^0(k) \to \mathcal{E}^0(k) \to \delta\mathcal{E}^0(k) \to 0$$

montre que l'on a un isomorphisme

$$\partial : \frac{\Gamma_{c\cap S}(Y, \delta\mathcal{E}^0(k))}{\delta\Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^0(k))} \to H^1_{c\cap S}(Y, h^0(k)) \simeq H^1_{c\cap S}(Y, \mathbb{C}).$$

On vérifie alors facilement que l'application considérée coïncide avec ∂^{-1}.

Vérifions enfin la dernière partie de l'assertion 3). On doit donc examiner le cas où la $2-$ forme fermée $\hat{w}$ peut être choisie $\mathcal{C}^\infty$ sur X^*. Mais comme on a, $H^2_{mod\,S}(X \setminus \bar{X}', \mathbb{C}) \simeq H^1(S^*, \mathbb{C})$, cela signifie que l'on peut choisir $\hat{w} = d\chi \wedge \varphi$ où φ est une $1-$forme $\mathcal{C}^\infty$ et $d-$fermée au voisinage de S^* et où la fonction χ est identiquement égale à 1 près de S^*. Mais alors la classe initiale est dans $j(H^1(S^*, \mathbb{C})$ d'après la remarque importante qui suit le lemme 8.3.3 et de sa variante qui suit le lemme 8.3.4. ■

Terminons ce paragraphe 8 en redonnant l'énoncé de notre résultat.

Théorème 8.6.1 *Sous les hypothèses standards pour* $n \geq 3$ *on a les propriétés suivantes*

- *1)* $\dim H^n_{c \cap S}(0) = \dim H^n(0)$.
- *2) La variation* $var : H^n_{c \cap S}(0) \to H^n_c(0)$ *est un ismorphisme d'espace vectoriels monodromiques.*
- *3) La forme hermitienne canonique*

$$\mathcal{H} : H^n_{c \cap S}(0) \times H^n(0) \to \mathbb{C}$$

  est non dégénérée.

Pour $n = 2$ *tout ceci reste vrai à condition de remplacer* $H^2_{c \cap S}(0)$ *par son quotient par* $j(H^1(S^*, \mathbb{C}))$.

9 Applications et un exemple pour conclure.

9.1

Il n'est pas difficile de déduire les analogues pour la valeur propre 1 des théorèmes 13 et 14 de $[B.91]$ de l'égalité entre $Im(\theta)$ et l'orthogonale pour $\tilde{h}$ de $H^0(S, H^{n-1}(0))$ dans $H^1(S^*, H^{n-1}(0))$. On obtient les théorèmes suivants dont la ligne de démonstration, maintenant que l'on sait que $Im(\theta)$ est exactement l'orthogonal de $H^0(S, H^{n-1}(0))$ dans $H^1(S^*, H^{n-1}(0))$ pour $\tilde{h}$, suit pas à pas celle de [B.91].

Théorème 9.1.1 *Sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1, notons par* k_0 *l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur le système local* $H^{n-1}(0)$ *sur* S^*. *Soit* $e \in H^n(0)$ *vérifiant* $\mathcal{N}^k(e) = 0$ *avec* $k \geq k_0$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *1)* $\tilde{ob}_k(e) = 0$.

- *2) Si* $w \in \Gamma(Y, Ker\,\delta^n(k))$ *vérifie* $r^n(k)(w) = e$, *pour chaque* $j \in \mathbb{Z}$, *les fonctionnelles analytiques*

$$P_{k+l}\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \bar{w}_k \wedge \square\big)$$

sont nulles pour $l \geq 2$.

De plus, pour vérifier 2) il suffit de le faire pour $l = 2$ *et pour* $j \in [0, n]$.

Théorème 9.1.2 *Sous les hypothèses standards pour la valeur propre 1, supposons que le prolongement méromorphe de* $\int_X |f|^{2\lambda}\square$ *admette un pôle d'ordre* $\geq k$ *en un entier négatif, avec* $k \geq \sup(k_0, k_1) + 2$ *où* k_0 *et* k_1 *sont respectivement les ordres de nilpotence de la monodromie agissant sur le système local* $H^{n-1}(0)_{|S^*}$ *et sur l'espace vectoriel* $H^n(0)$.
Alors l'ordre des pôles aux entiers négatifs assez grand est exactement égal à k *et l'on a* $k_0 \leq k_1 = k - 2$ *avec* $\tilde{ob}_{k_1} \not\equiv 0$.

9.2 Exemple.

Considérons la fonction $f(x, y, z) = x^2.(x^2+y^2)+z^4$. Comme cet exemple est très similaire à celui étudié en détail à la fin de [B.91], nous allons seulement esquisser son étude.
Tout d'abord l'homogénéïté de f nous assure que la monodromie agit de façon semi-simple sur $H^2(0)$. Cependant, nous allons montrer que le prolongement méromorphe de

$$\int_X |f|^{2\lambda}\rho.|z|^2 dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y} \wedge dz \wedge d\bar{z}$$

admet en $\lambda = -1$ un pôle triple, si $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(X)$ vaut identiquement 1 près de l'origine. Pour cela il suffit, par transformation de Mellin complexe, de montrer que le développement asymptotique, quand $|s| \to 0$ de l'intégrale

$$\int_{f=s} \rho.|z|^2 \frac{dx \wedge dy}{z^2} \wedge \frac{d\bar{x} \wedge d\bar{y}}{\bar{z}^2}$$

commence par un terme non nul en $(Log|s|)^2$, puisque l'on a sur $\{f = s\}$

$$4.z.dx \wedge dy \wedge dz/df = \frac{dx \wedge dy}{z^2}.$$

En remplaçant la fonction de troncature ρ par la fonction caractéristique du polydisque $(|x| \leq 1) \cap (|y| \leq 2)$ (voir [B.91] pour justifier que cela ne modifiera pas le pôle triple cherché) on est ramené à étudier le premier terme du développement asymptotique de la fonction

$$\varphi(s) = \int_{(|x|\leq 1)\cap(|y|\leq 2)} \frac{dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}}{|s - x^2(x^2+y^2)|}.$$

Après le changement de variable $x = u.s^{\frac{1}{4}}, y = t.u.s^{\frac{1}{4}}$ on trouve

$$\varphi(s) = c.\int_{(|u|\leq |s|^{-\frac{1}{4}})\cap(|t.u|\leq 2.|s|^{-\frac{1}{4}})} \frac{|u|^2.du \wedge d\bar{u} \wedge dt \wedge d\bar{t}}{|1 - u^4.(1+t^2)|}$$

où c est une constante non nulle.
Pour u fixé, on a

$$\int_{(|t.u|\leq 2.|s|^{-\frac{1}{4}})} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|1 - u^4.(1+t^2)|} \simeq c'.|u|^{-4}.Log(|u.s^{\frac{1}{4}}|)$$

ce qui donne

$$\varphi(s) \simeq c''.(Log|s|)^2$$

avec c' et c" des constantes non nulles.
Ceci montre que l'on a bien un pôle triple.
Il est facile de donner un élément non nul de $H^1_{\{0\}}(S, H^1(0))$ dans cet exemple: Fixons $0 < \alpha \ll \varepsilon$. Près d'un point du cercle $\{x = z = 0\,; |y| = \alpha\}$, on peut choisir comme coordonnées locales $\xi = x.\sqrt{y^2+x^2}, y, z$ de sorte que la fonction f dans ces coordonnées se réduit à $\xi^2 + z^4$. Posons

$$v := 2x.d\xi - \xi.dx.$$

Alors la forme différentielle holomorphe $z.v$, vérifie $d(z.v) = \frac{df}{f} \wedge z.v$ et elle induit une section globale, uniforme et non nulle[33]du système local $H^1(0)$ le long de ce cercle. Le lecteur se convaincra facilement qu'elle n'est pas prolongeable à l'origine et donne donc un élément non nul de $H^1_{\{0\}}(S, H^1(0))$.

[33]puisque le monôme z n'est pas dans l'idéal jacobien de $\xi^2 + z^4$.

10 Appendice : Description topologique de $H^n_{c\cap S}(0)$.

Soit $\mathbb{H} \overset{exp(2i\pi.\square)}{\longrightarrow} D^*$ le revêtement universel du disque pointé, et posons

$$\hat{X} := X \underset{D}{\times} \mathbb{H}.$$

Pour chaque voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $S \cap \partial X$ notons par $\hat{\mathcal{U}}$ l'image réciproque sur $\hat{X}$ de $\mathcal{U}$. Définissons la famille paracompactifiante Φ de fermés de $\hat{X}$ en posant

$$G \in \Phi \quad \text{ssi} \quad \exists\, \mathcal{U} \supset S \cap \partial X \quad / \quad G \cap \hat{\mathcal{U}} = \emptyset.$$

On remarquera que cette famille de supports est invariante par l'action de l'automorphisme de monodromie de $\hat{X}$ induite par l'automorphisme $\zeta \to \zeta + 1$ du demi-plan $\mathbb{H}$. Nous allons montrer la

Proposition 10.0.1 *On a un isomorphisme "naturel" d'espaces vectoriels monodromiques :*

$$\varepsilon : H^n_{c\cap S}(0) \to H^n_\Phi(\hat{X}, \mathbb{C})_{=1}.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que l'on a un difféomorphisme compatible à f[34], grace à J. Milnor [Mi.68]

$$\hat{X} \to F \times \mathbb{H}$$

où F dénote la fibre de Milnor de f à l'origine. En particulier on a un isomorphisme "naturel" d'espaces vectoriels monodromiques $H^n(\hat{X}, \mathbb{C}) \simeq H^n(F, \mathbb{C})$ qui donne, pour la valeur propre 1 l'isomorphisme monodromique $H^n(\hat{X}, \mathbb{C})_{=1} \simeq H^n(0)$.
Définissons ε. Soit donc $w \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \mathcal{E}^n(k)) \cap Ker\,\delta$ et définissons sur $\hat{X}$ la $n-$forme $\mathcal{C}^\infty$

$$W := \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\zeta)^j}{j!}.p^*(w_{k-j})$$

où $p : \hat{X} \to X$ est la projection et où $\zeta \in \mathbb{H}$.
On a $dW = 0$ car on a supposé que $\delta w = 0$, et on a sur $\hat{X}$ l'égalité $p^*(\frac{df}{f}) = d\zeta$. De plus, le fait que le support de w rencontre S suivant un

[34] Où f est définie sur $\hat{X}$ comme la composée de la projection sur $\mathbb{H}$ avec la fonction $exp(2i\pi.\square)$.

compact montre que W est à support dans Φ. On en déduit facilement que l'application ε est bien définie en posant

$$\varepsilon([w]) = [W].$$

Pour vérifier que ε commute aux monodromies, il nous suffit alors d'établir la relation

$$\varepsilon(\mathcal{N}(w)) = -\frac{\partial W}{\partial \zeta} \qquad (@)$$

puisque d'après la formule de Taylor, on a pour un polynôme P

$$exp(\frac{\partial}{\partial \zeta})(P)(\zeta) = P(\zeta + 1).$$

La vérification de (@) est immédiate. On en conclut que la classe $[W]$ est bien dans $H^n_\Phi(\hat{X}, \mathbb{C})_{=1}$.
Montrons maintenant l'injectivité de ε. Il suffit de considérer le cas d'une classe $[w]$ invariante par la monodromie qui donne 0 dans $H^n_\Phi(\hat{X}, \mathbb{C})_{=1}$, grace à l'aspect monodromique de ε. Mais dans ce cas, l'image par l'application d'oubli de support de $[W]$ dans $H^n(\hat{X}, \mathbb{C})_{=1} \simeq H^n(0)$ montre que $[w]$ est dans le noyau de $can_{c \cap S}$. On a donc seulement à traiter le cas où $[w] = i([\alpha]) = [\tilde{\alpha} \wedge d\chi]$ avec $\alpha \in H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(0))$ d'après le théorème 4.1.2[35]
Soit donc une telle classe invariante $[w] = [\tilde{\alpha} \wedge d\chi]$ vérifiant $\varepsilon([w]) = 0$. Ceci signifie que l'on peut trouver une $(n-1)-$forme $v \in \mathcal{C}^\infty_\Phi(\hat{X})$ vérifiant $dv = p^*(w)$. Fixons $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de $S \cap \partial X$ assez petit pour que l'on ait $Supp(v) \cap \hat{\mathcal{U}} = \emptyset$.
Supposons maintenant que $[w] \neq 0$ dans $H^n_{c \cap S}(0)$ et $n \geq 3$. Comme on sait que $[w] = i[\alpha]$ le choix de la fonction χ[36] permet de supposer que l'on a $Supp(\hat{w}) \cap S \subset \mathcal{U}$ où $\hat{w} = \tilde{\alpha} \wedge d\chi$ est également un représentant de la classe $[w]$.
La forme sesquilinéaire $\mathcal{H}$ étant non dégénérée, on peut trouver une classe $[w'] \in H^n(0)$ telle que l'on ait

$$P_2\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge w \wedge \bar{w'}_k\big) \neq 0.$$

Soit $\sigma \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathcal{U})$ valant identiquement 1 au voisinage de $S \cap Supp(w)$. Remarquons que, quitte à choisir $\mathcal{U}$ plus petit, on peut toujours supposer

[35]L'adaptation de ceci pour $n = 2$ ne présente pas de difficulté et elle est laissée au lecteur.

[36]voir la définition de l'application i au paragraphe 4.2.

que $Supp(\sigma) \cap \mathcal{U} = \emptyset$. La formule de Stokes et le prolongement analytique donne alors

$$P_1\big(\lambda = 0, \int_X |f|^{2\lambda} d\sigma \wedge \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge w \wedge \bar{w'}_k\big) \neq 0.$$

ce qui signifie que dans le développement asymptotique en $s = 0$ de l'intégrale fibre

$$s\frac{\partial}{\partial s}\int_{f=s} \sigma.w \wedge \bar{w'}_k$$

le terme constant est non nul. Mais ceci est absurde car $p^*(w) = dv$ et $Supp(\sigma) \subset \mathcal{U}$ montrent que l' intégrale

$$\int_{f=s} \sigma.w \wedge \bar{w'}_k = -\int_{f=s} d\sigma \wedge v \wedge \bar{w'}_k$$

est $\mathcal{C}^\infty$ près de $s = 0$[37] puisque $Supp(v) \cap \hat{\mathcal{U}} = \emptyset$.
Terminons la preuve de l'injectivité de ε pour $n = 2$. Il suffit de voir que $j(H^1(S^*, \mathbb{C}))$ s'injecte dans $H^2_\Phi(\hat{X}, \mathbb{C})_{=1}$. Si φ est $d-$fermée au voisinage de S^* et $\chi \equiv 1$ près de S^* et s'annule dès que l'on s'éloigne, on a $j[\varphi] = [d\chi \wedge \varphi]$ et $\varepsilon[d\chi \wedge \varphi] = [p^*(d\chi \wedge \varphi)]$. Mais si $p^*(d\chi \wedge \varphi) = d\lambda$ où $\lambda \in \mathcal{C}^\infty_\Phi(\hat{X})^{n-1}$ on aura $p^*(\chi.\varphi) - \lambda$ qui sera $d-$fermée et localement $d-$exacte près de ∂S. La classe qu'elle définie dans $H^{n-1}(F, \mathbb{C})$ est donc nulle[38]. On en conclut que φ est globalement $d-$exacte au voisinage de ∂S et donc induit la classe nulle de $H^1(S^*, \mathbb{C})$.

Montrons maintenant la surjectivité pour $n \geq 2$, en montrant par récurrence sur $k \geq 1$, que si $[W] \in H^n_\Phi(\hat{X}, \mathbb{C})_{=1}$ vérifie $(T-1)^k[W] = 0$, elle est bien dans l'image de ε.
Pour $k = 1$, on a $T[W] = [W]$ et on peut trouver une $(n-1)-$forme $V \in \mathcal{C}^\infty_\Phi(\hat{X})$ qui vérifie $-\frac{\partial}{\partial\zeta}W = dV$. On écrit alors[39] $V = -\frac{\partial}{\partial\zeta}U$ avec $U \in \mathcal{C}^\infty_\Phi(\hat{X})^{n-1}$. Alors $W - dU$ est un représentant $T-$invariant de la classe $[W]$ et il existe une forme $w \in \mathcal{C}^\infty_{c\cap S}(X \setminus f^{-1}(0))^n$ vérifiant $dw = 0$ et $p^*(w) = W - dU$. On conclut en utilisant le théorème de A.Grothendieck [Gr.65] pour trouver une $n-$forme semi-méromorphe $d-$fermée $\tilde{w}$ à pôles dans $f^{-1}(0)$ et à support $c \cap S$ induisant la même classe que w dans $H^n_{c\cap S}(X \setminus f^{-1}(0), \mathbb{C})$.

[37] Plus exactement, la partie dans $\sum_{j=0}^n \mathbb{C}[[s,\bar{s}]].(Log|s|^2)^j$ de son développement asymptotique en $s = 0$ est en fait dans $\mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$.

[38] Car une section globale du faisceau $H^{n-1}(0)$ qui est nulle près de ∂S est nulle.

[39] C'est toujours possible : on utilise ici le complexe $(\mathcal{E}^\bullet[Log\, f], d^\bullet)$ où $-2i\pi.\zeta = Log\, f$ sur $\hat{X}$, pour calculer la partie spectrale pour la valeur propre 1 de la monodromie des cycles évanescents de f.

Supposons maintenant le résultat montré pour $k \leq k_0$ avec $k_0 \geq 1$ et montrons-le pour $k = k_0 + 1$. Alors d'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire $-\frac{\partial}{\partial \zeta} W = \tilde{W} + dV$ où $[\tilde{W}]$ est dans l'image de ε et où $V \in \mathcal{C}^\infty_\Phi(\hat{X})^{n-1}$. On écrit à nouveau $V = -\frac{\partial}{\partial \zeta} U$ avec $U \in \mathcal{C}^\infty_\Phi(\hat{X})^{n-1}$ et arrive à $-\frac{\partial}{\partial \zeta}(W - dU) = \tilde{W} = \varepsilon(\tilde{w})$. Mais alors la $n-$forme

$$\int_0^\zeta \tilde{W}(z).dz + (W - dU)$$

est invariante par la monodromie. Elle est donc image réciproque d'une forme $\mathcal{C}^\infty$ et $d-$fermée sur $X \setminus f^{-1}(0)$ à support dans $c \cap S$. On conclut alors facilement grâce au même argument que dans le cas $k = 1$, en intégrant terme à terme la formule donnant $\varepsilon(\tilde{w})$. $\blacksquare$

Bibliographie.

- [A.V.G] Arnold, V., Varchenko, A. et Goussein-Zadé, S. *Singularités des applications différentiables*, vol.2 Monodromie et comportement asymptotique des intégrales, Moscou 1986 (traduction française, Ed. Mir).

- [B.84.a] Barlet, D. *Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques*, Ann. Scient. ENS 4-ième série, 17 (1984) p.239-315.

- [B.84.b] Barlet, D. *Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de* $|f|^{2\lambda}$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 34 (1984) p.75-107.

- [B.85] Barlet, D. *La forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée*, Invent. Math. 81 (1985) p.115-153 .

- [B.90] Barlet, D. *La forme hermitienne canonique pour une singularité presque isolée*, in Complex Analysis (K.Diederich eds) Vieweg,Wuppertal (1990) p.20-28 .

- [B.91] Barlet, D. *Emmêlements de strates consécutives pour les cycles évanescents*, Ann. Scient. ENS 4-ième série 24 (1991) p.401-506.

- [B.97] Barlet, D. *La variation pour une hypersurface à singularité isolée relativement à la valeur propre 1* , Revue de l'Inst. E. Cartan (Nancy) 15 (1997) p.1-29 .

- [B.02] Barlet, D. *Singularités réelles isolées et développements asymptotiques d'intégrales oscillantes*, in Séminaire et Congrès 9 (Actes des journées mathématiques à la mémoire de J. Leray) Guillopé, L. et Robert, D. éditeurs, Société Mathématique de France (2004), p. 25-50.

- [B.03] Barlet, D. *Interaction de strates consécutives II* , Publ. du RIMS Kyoto Univ., vol. 41 (2005), p. 139-173.

- [B.04] Barlet, D. *Sur certaines singularités non isolées d'hypersurfaces I*, preprint Institut E.Cartan (Nancy) 2004/$n°$ 03. A paraître au Bull. Soc. Math. France.

- [B.05] Barlet, D. *Sur certaines singularités non isolées d'hypersurfaces II*, preprint Institut E.Cartan (Nancy) 2005/$n°$ 42.

- [B.M.89] Barlet, D. et Maire, H.-M. *Asymptotic expansion of complex integrals via Mellin transform*, Journ. Funct. Anal. 83 (1989) p.233-257.

- [Br. 86] Brylinski, J.-L. *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformation de Fourier et sommes trigonométriques*, in *Géométrie et analyse microlocales*, Astérisque, vol. 140-141, Société Mathématique de France, 1986, p.3-134.

- [D. 73] Deligne, P. *Le formalisme des cycles évanescents (exposés 13 et 14)*, in *SGA 7 II*, Lect. Notes in Math., vol.340, Springer-Verlag, 1973, p.82-173.

- [Go.58] Godement, R. *Théorie des faisceaux*, Hermann (1958) Nancago.

- [Gr.65] Grothendieck, A. *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES, 29 (1966) p.96-103.

- [K.76] Kashiwara, M. *b-Function and Holonomic Systems, Rationality of Roots of b-Functions*, Invent. Math. 38 (1976) p.33-53.

- [K.84] Kashiwara, M. *The Riemann-Hilbert Problem for Holonomic Systems*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 20 (1984) p.319-365.

- [K. S. 90] Kashiwara, M. and Schapira, P. *Sheaves on Manifolds*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol.292, Springer-Verlag, 1990.

- [Le.59] Leray, J. *Le problème de Cauchy III* , Bull.Soc. Math. France 87 (1959) p.81-180 .

- [Lo.86] Loeser, F. *A propos de la forme hermitienne canonique d'une singularité isolée d'hypersurface*, Bull. Soc. Math. France, 114 (1986) p.385-392.

- [Ma.74] Malgrange, B. *Intégrales asymptotiques et monodromie*, Ann. Scient. ENS 4-ième serie 7 (1974) p.405-430 .

- [Mi.68] Milnor, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61 (1968) Princeton .

Daniel Barlet,
Université Henri Poincaré (Nancy I) et Institut Universitaire de France,
Institut E.Cartan UHP/CNRS/INRIA, UMR 7502 ,
Faculté des Sciences et Techniques, B.P. 239

54506 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex , France.
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr